

# Des lois de Newton à l'équation de Boltzmann : dérivation dans le cas des sphères dures

Nathalie Ayi

Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sorbonne Université  
INRIA Paris, Équipe ANGE

**Séminaire Bourbaki du vendredi**  
18 Novembre 2022

# Contexte historique

- **5ème siècle avant J.-C.** : Première **théorie atomiste** dûe à **Leucippe** et **Démocrite** reprise par Épicure (341-270 avant J.-C.) et Lucrèce (1er siècle avant J.-C.).
- **1738** : Grâce à **Daniel Bernoulli**, cette idée pénètre le domaine scientifique (explication de la pression d'un gaz).
- **1858** : **Rudolf Clausius** introduit la notion de **libre parcours moyen**.
- **1859** : Dérivation heuristique de la fonction de distribution qui porte son nom par **James Clerk Maxwell**.
- **1872** : **Ludwig Boltzmann** dérive heuristiquement son équation éponyme.

# L'équation de Boltzmann

**Idée fondamentale :** Toutes les **molécules** sont **identiques**, on décide alors de ne plus toutes les suivre mais plutôt de **décrire de manière statistique** la dynamique d'une seule molécule "typique".

# L'équation de Boltzmann

**Idée fondamentale** : Toutes les **molécules** sont **identiques**, on décide alors de ne plus toutes les suivre mais plutôt de **décrire de manière statistique** la dynamique d'une seule molécule "typique".

**Point de vue statistique** : on s'intéresse à l'évolution de *la densité de particules*  $f(t, x, v)$  où

# L'équation de Boltzmann

**Idée fondamentale** : Toutes les **molécules** sont **identiques**, on décide alors de ne plus toutes les suivre mais plutôt de **décrire de manière statistique** la dynamique d'une seule molécule "typique".

**Point de vue statistique** : on s'intéresse à l'évolution de *la densité de particules*  $f(t, x, v)$  où

$t$  = temps

$x$  = position

$v$  = vitesse

# L'équation de Boltzmann

**Idee fondamentale** : Toutes les **molécules** sont **identiques**, on décide alors de ne plus toutes les suivre mais plutôt de **décrire de manière statistique** la dynamique d'une seule molécule "typique".

**Point de vue statistique** : on s'intéresse à l'évolution de *la densité de particules*  $f(t, x, v)$  où

$t$  = temps

$x$  = position

$v$  = vitesse

**Pour tout volume infinitésimal**  $dx dv$  **autour du point**  $(x, v)$  :

$f(t, x, v) dx dv =$  *nombre de particules* en position  $x$  avec vitesse  $v$  au temps  $t$ .

# L'équation de Boltzmann

$$\underbrace{\partial_t f + v \cdot \nabla_x f}_{\text{transport libre}} = \underbrace{Q(f, f)}_{\text{collisions}}$$

- **Opérateur de collision :**

$$Q(f, f) = \int \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{S}^{d-1}} [f' f'_1 - f f_1] b(v - v_1, \omega) dv_1 d\omega$$

où  $f = f(v)$ ,  $f_1 = f(v_1)$ ,  $f' = f(v')$ ,  $f'_1 = f(v'_1)$ ,  
et  $v' = v + \omega \cdot (v_1 - v)\omega$ ,  $v'_1 = v_1 - \omega \cdot (v_1 - v)\omega$ .

# L'équation de Boltzmann

$$\underbrace{\partial_t f + v \cdot \nabla_x f}_{\text{transport libre}} = \underbrace{Q(f, f)}_{\text{collisions}}$$

- **Opérateur de collision :**

$$Q(f, f) = \int \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{S}^{d-1}} [f' f'_1 - f f_1] b(v - v_1, \omega) dv_1 d\omega$$

où  $f = f(v)$ ,  $f_1 = f(v_1)$ ,  $f' = f(v')$ ,  $f'_1 = f(v'_1)$ ,  
et  $v' = v + \omega \cdot (v_1 - v)\omega$ ,  $v'_1 = v_1 - \omega \cdot (v_1 - v)\omega$ .

- L'opérateur est constitué d'un **terme de gain** et d'un **terme de perte**

$$Q(f, f) = Q^+(f, f) - Q^-(f, f).$$



# L'équation de Boltzmann

$$\underbrace{\partial_t f + v \cdot \nabla_x f}_{\text{transport libre}} = \underbrace{Q(f, f)}_{\text{collisions}}$$

- **Opérateur de collision :**

$$Q(f, f) = \int \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{S}^{d-1}} [f' f'_1 - f f_1] b(v - v_1, \omega) dv_1 d\omega$$

où  $f = f(v)$ ,  $f_1 = f(v_1)$ ,  $f' = f(v')$ ,  $f'_1 = f(v'_1)$ ,  
et  $v' = v + \omega \cdot (v_1 - v)\omega$ ,  $v'_1 = v_1 - \omega \cdot (v_1 - v)\omega$ .

- L'opérateur est constitué d'un **terme de gain** et d'un **terme de perte**

$$Q(f, f) = Q^+(f, f) - Q^-(f, f).$$

- Les **collisions** sont **élastiques**, on a **conservation du moment et de l'énergie** :

$$v + v_1 = v' + v'_1, \quad |v|^2 + |v_1|^2 = |v'|^2 + |v'_1|^2.$$

# Propriétés de l'équation de Boltzmann

Pour toute fonction test  $\varphi$ ,

$$\int Q(f, f)\varphi dv = \frac{1}{4} \int \int \int [f' f'_1 - f f_1] (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) b(v - v_1, \omega) dv dv_1 d\omega$$

qui s'annule si et seulement si

$$\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1 = 0$$

i.e.  $\varphi$  est une **combinaison linéaire** de  $\{1, v_1, \dots, v_d, |v|^2\}$ .

On en déduit **les lois de conservation locale**

$$\partial_t \int_{\mathbf{R}^d} f \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{|v|^2}{2} \end{pmatrix} dv + \nabla_x \cdot \begin{pmatrix} v \\ v \otimes v \\ \frac{|v|^2}{2} v \end{pmatrix} dv = 0.$$

# Le théorème H

- Dissipation d'entropie :

$$\begin{aligned} D(f) &\equiv - \int Q(f, f) \log f dv \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} b(v - v_1, \omega) [f' f'_1 - f f_1] \log \frac{f' f'_1}{f f_1} dv dv_1 d\omega \geq 0. \end{aligned}$$

# Le théorème H

- **Dissipation d'entropie :**

$$\begin{aligned} D(f) &\equiv - \int Q(f, f) \log f \, dv \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} b(v - v_1, \omega) [f' f'_1 - f f_1] \log \frac{f' f'_1}{f f_1} \, dv \, dv_1 \, d\omega \geq 0. \end{aligned}$$

- **Théorème H :**

$$\frac{d}{dt} H(f(t)) \leq 0$$

où

$$H(f(t)) := \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} f(t, x, v) \log f(t, x, v) \, dx \, dv.$$

⇒ **Irréversibilité** (ce qui vaudra à Boltzmann de nombreuses **controverses**).

- **L'équilibre** correspond à  $Q(f, f) = 0$  et c'est satisfait seulement par les **Maxwelliennes**

$$M_{\rho, u, \theta}(v) := \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{d/2}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}},$$

où  $\rho \in \mathbf{R}_+$ ,  $u \in \mathbf{R}^d$  et  $\theta \in \mathbf{R}_+$ .

- **L'équilibre** correspond à  $Q(f, f) = 0$  et c'est satisfait seulement par les **Maxwelliennes**

$$M_{\rho, u, \theta}(v) := \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{d/2}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}},$$

où  $\rho \in \mathbf{R}_+$ ,  $u \in \mathbf{R}^d$  et  $\theta \in \mathbf{R}_+$ .

### Caractère bien posé :

- ▶ Existence en temps court d'une unique solution continue.
- ▶ Existence d'une unique solution globale si la donnée initiale est suffisamment proche de l'équilibre (Ukai, 1974).
- ▶ Existence d'une solution renormalisée (DiPerna-Lions, 1989).

## Sixième problème de Hilbert (1900)

- **Idée** : utiliser l'équation de Boltzmann comme **étape intermédiaire** lors du **passage de modèles atomiques à des modèles continus** pour la dynamique des gaz.

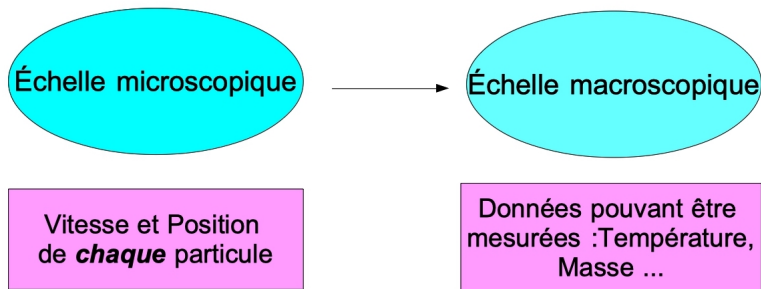
## Sixième problème de Hilbert (1900)

- **Idée** : utiliser l'équation de Boltzmann comme **étape intermédiaire** lors du **passage de modèles atomiques à des modèles continus** pour la dynamique des gaz.



## Sixième problème de Hilbert (1900)

- **Idée** : utiliser l'équation de Boltzmann comme **étape intermédiaire** lors du **passage de modèles atomiques à des modèles continus** pour la dynamique des gaz.



## Sixième problème de Hilbert (1900)

- **Idée** : utiliser l'équation de Boltzmann comme **étape intermédiaire** lors du **passage de modèles atomiques à des modèles continus** pour la dynamique des gaz.



# Le scaling Boltzmann-Grad (1949)

**Changement d'échelle** : passage à la limite sur un *paramètre précis* du système.

# Le scaling Boltzmann-Grad (1949)

**Changement d'échelle** : passage à la limite sur un *paramètre précis* du système.

**Scaling Boltzmann-Grad** :  $N \rightarrow \infty$ ,  $N\varepsilon^{d-1} = 1$ .

# Le scaling Boltzmann-Grad (1949)

**Changement d'échelle** : passage à la limite sur un *paramètre précis* du système.

**Scaling Boltzmann-Grad** :  $N \rightarrow \infty$ ,  $N\varepsilon^{d-1} = 1$ .

**Gaz rarefié** :  $N\varepsilon^d \ll 1$

# Le scaling Boltzmann-Grad (1949)

**Changement d'échelle** : passage à la limite sur un *paramètre précis* du système.

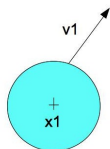
**Scaling Boltzmann-Grad** :  $N \rightarrow \infty$ ,  $N\varepsilon^{d-1} = 1$ .

**Gaz rarefié** :  $N\varepsilon^d \ll 1$ , *pas trop de collisions*.



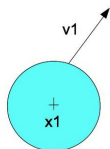
# Les sphères dures

**Lanford** a obtenu la dérivation de **l'équation de Boltzmann** à partir d'un système de particules dans le contexte des **sphères dures** (1975).

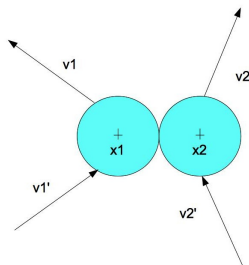


# Les sphères dures

**Lanford** a obtenu la dérivation de **l'équation de Boltzmann** à partir d'un système de particules dans le contexte des **sphères dures** (1975).



Les particules rebondissent selon les lois de la **réflexion élastique**.





# Les sphères dures

**Modèle microscopique** : pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i, \\ \frac{dv_i}{dt} = 0 \end{cases}$$

sur le domaine

$$\mathcal{D}_N := \{Z_N \in R^{2dN} \mid \forall i \neq j, |x_i - x_j| > \varepsilon\}$$

où  $z_i = (x_i, v_i)$ ,  $Z_N = (z_1, \dots, z_N)$ .

Si  $|x_i - x_j| = \varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} v'_i &= v_i - ((v_j - v_i) \cdot \nu^{i,j}) \nu^{i,j} \\ v'_j &= v_j + ((v_j - v_i) \cdot \nu^{i,j}) \nu^{i,j} \end{aligned}$$

où  $\nu^{i,j} := (x_i - x_j)/|x_i - x_j|$  et dans le cas où  $\nu^{i,j} \cdot (v'_i - v'_j) < 0$  i.e  $(v'_i, v'_j)$  vitesses précollisionnelles.

## Trajectoires pathologiques :

- ▶ collisions à plus de deux particules ou collisions rasantes i.e. où  $\nu^{i,j} \cdot (v'_i - v'_j) = 0$ ,
- ▶ un nombre infini de collisions en temps fini.

## Trajectoires pathologiques :

- ▶ collisions à plus de deux particules ou collisions rasantes i.e. où  $\nu^{i,j} \cdot (v'_i - v'_j) = 0$ ,
- ▶ un nombre infini de collisions en temps fini.

### Proposition

Soit  $N, \varepsilon$  fixés. L'ensemble  $E_N$  des **configurations initiales** qui mènent à une **trajectoire pathologique** est de **mesure nulle**.

Les **collisions multiples** sont statistiquement des **événements négligeables**.

Le **flot** engendré par les équations de Newton est **bien défini** quand on travaille **en dehors de cet ensemble exceptionnel**  $E_N$ .

# Dérivation formelle de la limite

**Équation de Liouville** pour la fonction de distribution de  $N$  particules :

$$\partial_t f_N + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{x_i} f_N = 0 \text{ sur } \mathcal{D}_N$$

où  $z_i = (x_i, v_i)$ ,  $Z_N = (z_1, \dots, z_N)$  avec la condition de bord

$$f_N(t, Z'_N) = f_N(t, Z_N)$$

et

$$f_N(t, Z_{\sigma(N)}) = f_N(t, Z_N)$$

où  $Z_{\sigma(N)} = (x_{\sigma(1)}, v_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}, v_{\sigma(N)})$  (particules indistinguables).

# Dérivation formelle de la limite

**Équation de Liouville** pour la fonction de distribution de  $N$  particules :

$$\partial_t f_N + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{x_i} f_N = 0 \text{ sur } \mathcal{D}_N$$

où  $z_i = (x_i, v_i)$ ,  $Z_N = (z_1, \dots, z_N)$  avec la condition de bord

$$f_N(t, Z'_N) = f_N(t, Z_N)$$

et

$$f_N(t, Z_{\sigma(N)}) = f_N(t, Z_N)$$

où  $Z_{\sigma(N)} = (x_{\sigma(1)}, v_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}, v_{\sigma(N)})$  (particules indistinguables).

**But :** Obtenir une équation pour la fonction de distribution d'une particule quelconque.

# Dérivation formelle de la limite

**Équation de Liouville** pour la fonction de distribution de  $N$  particules :

$$\partial_t f_N + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{x_i} f_N = 0 \text{ sur } \mathcal{D}_N$$

où  $z_i = (x_i, v_i)$ ,  $Z_N = (z_1, \dots, z_N)$  avec la condition de bord

$$f_N(t, Z'_N) = f_N(t, Z_N)$$

et

$$f_N(t, Z_{\sigma(N)}) = f_N(t, Z_N)$$

où  $Z_{\sigma(N)} = (x_{\sigma(1)}, v_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}, v_{\sigma(N)})$  (particules indistinguables).

**But :** Obtenir une équation pour la fonction de distribution d'une particule quelconque.

**Marginale** d'ordre un :

$$f_N^{(1)}(t, z_1) = \int f_N(t, z_1, \dots, z_N) \mathbf{1}_{\{Z_N \in \mathcal{D}_N\}} dz_2 \dots dz_N.$$

## Dérivation formelle de la limite

On multiplie l'équation de Liouville par  $\phi(t, z_1)$ , on intègre en  $z_2, \dots, z_N$  et par la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t f_N^{(1)} + v_1 \cdot \nabla_{x_1} f_N^{(1)} &= (N-1) \varepsilon^{d-1} \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} \left[ f_N^{(2)}(t, x_1, v'_1, x_1 + \varepsilon \nu, v'_2) \right. \\ &\quad \left. - f_N^{(2)}(t, x_1, v_1, x_1 - \varepsilon \nu, v_2) \right] \\ &\quad ((v_2 - v_1) \cdot \nu)_+ d\nu dv_2. \end{aligned}$$

# Dérivation formelle de la limite

On multiplie l'équation de Liouville par  $\phi(t, z_1)$ , on intègre en  $z_2, \dots, z_N$  et par la formule de Green, on obtient :

$$\partial_t f_N^{(1)} + v_1 \cdot \nabla_{x_1} f_N^{(1)} = (N-1)\varepsilon^{d-1} \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} \left[ f_N^{(2)}(t, x_1, v'_1, x_1 + \varepsilon\nu, v'_2) - f_N^{(2)}(t, x_1, v_1, x_1 - \varepsilon\nu, v_2) \right] ((v_2 - v_1) \cdot \nu)_+ d\nu dv_2.$$

$N \rightarrow \infty,$

$$\partial_t f + v_1 \cdot \nabla_{x_1} f = \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} \left[ f^{(2)}(t, x_1, v'_1, x_1, v'_2) - f^{(2)}(t, x_1, v_1, x_1, v_2) \right] ((v_2 - v_1) \cdot \nu)_+ d\nu dv_2$$



## Dérivation formelle de la limite

On multiplie l'équation de Liouville par  $\phi(t, z_1)$ , on intègre en  $z_2, \dots, z_N$  et par la formule de Green, on obtient :

$$\partial_t f_N^{(1)} + v_1 \cdot \nabla_{x_1} f_N^{(1)} = (N-1)\varepsilon^{d-1} \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} \left[ f_N^{(2)}(t, x_1, v'_1, x_1 + \varepsilon\nu, v'_2) - f_N^{(2)}(t, x_1, v_1, x_1 - \varepsilon\nu, v_2) \right] ((v_2 - v_1) \cdot \nu)_+ d\nu dv_2.$$

$N \rightarrow \infty,$

$$\partial_t f + v_1 \cdot \nabla_{x_1} f = \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} \left[ f^{(2)}(t, x_1, v'_1, x_1, v'_2) - f^{(2)}(t, x_1, v_1, x_1, v_2) \right] ((v_2 - v_1) \cdot \nu)_+ d\nu dv_2$$

Si  $f^{(2)}(Z_2) = f(z_1)f(z_2) \Rightarrow$  **Équation de Boltzmann.**

# Dérivation formelle de la limite

On multiplie l'équation de Liouville par  $\phi(t, z_1)$ , on intègre en  $z_2, \dots, z_N$  et par la formule de Green, on obtient :

$$\partial_t f_N^{(1)} + v_1 \cdot \nabla_{x_1} f_N^{(1)} = (N-1)\varepsilon^{d-1} \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} \left[ f_N^{(2)}(t, x_1, v'_1, x_1 + \varepsilon\nu, v'_2) - f_N^{(2)}(t, x_1, v_1, x_1 - \varepsilon\nu, v_2) \right] ((v_2 - v_1) \cdot \nu)_+ d\nu dv_2.$$

$N \rightarrow \infty,$

$$\partial_t f + v_1 \cdot \nabla_{x_1} f = \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} \left[ f^{(2)}(t, x_1, v'_1, x_1, v'_2) - f^{(2)}(t, x_1, v_1, x_1, v_2) \right] ((v_2 - v_1) \cdot \nu)_+ d\nu dv_2$$

Si  $f^{(2)}(Z_2) = f(z_1)f(z_2) \Rightarrow$  **Équation de Boltzmann.**

Notion clé = **Propagation du chaos.**

# Hiérarchie BBGKY

**Marginale** d'ordre  $s$  :

$$f_N^{(s)}(t, Z_s) = \int f_N(t, Z_s, z_{s+1} \dots, z_N) \mathbf{1}_{\{Z_N \in \mathcal{D}_N\}} dz_{s+1} \dots dz_N.$$

# Hiérarchie BBGKY

Marginale d'ordre  $s$  :

$$f_N^{(s)}(t, Z_s) = \int f_N(t, Z_s, z_{s+1}, \dots, z_N) \mathbf{1}_{\{Z_N \in \mathcal{D}_N\}} dz_{s+1} \dots dz_N.$$

La **hiérarchie BBGKY** : pour  $s < N$ ,

$$\partial_t f_N^{(s)} + V_s \cdot \nabla_{X_s} f_N^{(s)} = \mathcal{C}_{s,s+1} f_N^{(s+1)}$$

avec  $\mathcal{C}_{s,s+1} = \mathcal{C}_{s,s+1}^+ - \mathcal{C}_{s,s+1}^-$  où

$$\mathcal{C}_{s,s+1}^\pm f^{(s+1)} = \sum_{i=1}^s \mathcal{C}_{s,s+1}^{\pm,i} f^{(s+1)}$$

et

$$\mathcal{C}_{s,s+1}^{\pm,i} f^{(s+1)}(Z_s) := (N-s) \varepsilon^{d-1} \int_{\mathcal{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} (\nu \cdot (v_{s+1} - v_i))_\pm \\ \times f^{(s+1)}(Z_s, x_i + \varepsilon \nu, v_{s+1}) d\nu dv_{s+1}.$$

[Retour](#)

La **hiérarchie BBGKY** : pour  $s < N$ ,

$$\partial_t f_N^{(s)} + V_s \cdot \nabla_{X_s} f_N^{(s)} = \mathcal{C}_{s,s+1} f_N^{(s+1)}.$$

On note  $\Psi_s(t)$  le **flot de  $s$  particules** associé au système des **sphères dures** et par  $\mathcal{S}_s$  l'opérateur solution associé :

$$\mathcal{S}_s(t) : f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}_s; \mathbf{R}) \mapsto f(\Psi_s(-t, \cdot)) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}_s; \mathbf{R}).$$

**Formule de Duhamel :**

$$f_N^{(s)}(t, Z_s) = \mathcal{S}_s(t) f_N^{(s)}(0, Z_s) + \int_0^t \mathcal{S}_s(t - \tau) \mathcal{C}_{s,s+1} f_N^{(s+1)}(\tau, Z_s) d\tau.$$

# Hiérarchie de Boltzmann

**Passage formelle à la limite** dans la hiérarchie BBGKY permet de tomber sur la **hiérarchie de Boltzmann** : pour tout  $s \geq 1$ ,

$$\partial_t f^{(s)} + V_s \cdot \nabla_{X_s} f^{(s)} = \mathcal{C}_{s,s+1}^0 f^{(s+1)}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{s,s+1}^0 f^{(s+1)}(t, Z_s) &:= \sum_{i=1}^s \int (\nu \cdot (v_{s+1} - v_i))_+ \\ &\times (f^{(s+1)}(t, x_1, v_1, \dots, v_i', \dots, x_s, v_s, x_i, v_{s+1}') \\ &\quad - f^{(s+1)}(t, Z_s, x_i, v_{s+1})) d\nu dv_{s+1}. \end{aligned}$$

Si  $f$  **solution de l'équation de Boltzmann** et

$$f^{(s)}(t, Z_s) = f(t, z_1) f(t, z_2) \dots f(t, z_s)$$

alors la suite  $(f^{(s)})_{s \geq 1}$  solution de la hiérarchie de Boltzmann.

# Estimations uniformes, existence et unicité

- Données initiales  $F_N(0) = (f_N^{(s)}(0))_{1 \leq s \leq N}$  dans les bons espaces fonctionnels (**espace à poids**)  $\Rightarrow$  existence d'une **unique solution**

$F_N(t) = (f_N^{(s)}(t))_{1 \leq s \leq N}$  à la hiérarchie BBGKY sur  $[0, T]$  pour un certain  $T > 0$  avec la borne

$$\| \| F_N \| \|_{\varepsilon, \beta, \mu} \leq \| F_N(0) \|_{\varepsilon, \beta_0, \mu_0}.$$

- Idem pour la hiérarchie de Boltzmann.

## Théorème

Pour tous  $\beta > 0$  et  $\mu_0 \in \mathbf{R}$ , il existe  $T^* = T^*[\beta_0, \mu_0] > 0$  vérifiant ce qui suit.  
Soit  $f_0 \equiv f^0(x, v)$  continue sur  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$  vérifiant

$$0 \leq f^0(x, v) \leq e^{-\mu_0 - \frac{1}{2}\beta_0|v|^2} \text{ p.p. sur } \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$$

$$\text{et } \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} f^0(x, v) dx dv = 1.$$

Pour tout  $N \geq 1$ , on pose

$$f_N^0(Z_N) := \mathbf{1}_{\{Z_N \in \mathcal{D}_N\}} \prod_{k=1}^N f^0(x_k, v_k) \times \left( \int_{\mathbf{R}^{2dN}} \mathbf{1}_{\{Z_N \in \mathcal{D}_N\}} \prod_{k=1}^N f^0(x_k, v_k) dZ_N \right)^{-1}.$$

Alors  $f_N^{(s)}$  converge au sens des observables vers  $\prod_{k=1}^s f(t, x_k, v_k)$  localement uniformément en  $(t, X_s)$  sur  $[0, T^*] \times \Omega_s$  où  $f$  est solution de l'équation de Boltzmann avec condition initiale  $f|_{t=0} = f^0$  avec

$$\Omega_s := \{X_s \in \mathbf{R}^{2ds} \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}.$$



## Théorème

Pour tous  $\beta > 0$  et  $\mu_0 \in \mathbf{R}$ , il existe  $T^* = T^*[\beta_0, \mu_0] > 0$  vérifiant ce qui suit.  
Soit  $f_0 \equiv f^0(x, v)$  continue sur  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$  vérifiant

$$0 \leq f^0(x, v) \leq e^{-\mu_0 - \frac{1}{2}\beta_0|v|^2} \text{ p.p. sur } \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$$

$$\text{et } \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} f^0(x, v) dx dv = 1.$$

Pour tout  $N \geq 1$ , on pose

$$f_N^0(Z_N) := \mathbf{1}_{\{Z_N \in \mathcal{D}_N\}} \prod_{k=1}^N f^0(x_k, v_k) \times \left( \int_{\mathbf{R}^{2dN}} \mathbf{1}_{\{Z_N \in \mathcal{D}_N\}} \prod_{k=1}^N f^0(x_k, v_k) dZ_N \right)^{-1}.$$

En particulier,

$f_N^{(1)}$  converge au sens des observables vers  $f$

localement uniformément en  $(t, x)$  sur  $[0, T^*[ \times \mathbf{R}^d$ .

## Idée de Lanford

$$f_N^{(s)}(t) = \mathcal{S}_s(t)f_N^{(s)}(0) + \int_0^t \mathcal{S}_s(t-t_1)\mathcal{C}_{s,s+1}f_N^{(s+1)}(t_1)dt_1.$$

**Itérer la formule de Duhamel**  $\Rightarrow$  expression des marginales sous forme de séries.

# Idée de Lanford

$$f_N^{(s)}(t) = \mathcal{S}_s(t) f_N^{(s)}(0) + \int_0^t \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} f_N^{(s+1)}(t_1) dt_1.$$

**Itérer la formule de Duhamel**  $\Rightarrow$  expression des marginales sous forme de séries.

**Les séries BBGKY :**

$$f_N^{(s)}(t) = \sum_{n=0}^{N-s} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \mathcal{S}_{s+1}(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2} \dots \mathcal{S}_{s+n}(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1.$$

# Idée de Lanford

$$f_N^{(s)}(t) = \mathcal{S}_s(t) f_N^{(s)}(0) + \int_0^t \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} f_N^{(s+1)}(t_1) dt_1.$$

**Itérer la formule de Duhamel**  $\Rightarrow$  expression des marginales sous forme de séries.

**Les séries BBGKY :**

$$f_N^{(s)}(t) = \sum_{n=0}^{N-s} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \mathcal{S}_{s+1}(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2} \dots \mathcal{S}_{s+n}(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1.$$

**Les séries de Boltzmann :**

$$f^{(s)}(t) = \sum_{n \geq 0} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{S}_s^0(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1}^0 \mathcal{S}_{s+1}^0(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2}^0 \dots \mathcal{S}_{s+n}^0(t_n) f^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1$$

# Stratégie de la preuve

- 1 Borne sur les séries.
- 2 Convergence terme à terme dans les séries.

# Stratégie de la preuve

- 1 Borne sur les séries.
- 2 Convergence terme à terme dans les séries.

**Stratégie** = **Interprétation géométrique** des termes.

# Stratégie de la preuve

- 1 Borne sur les séries.
- 2 Convergence terme à terme dans les séries.

**Stratégie** = **Interprétation géométrique** des termes.

**Les séries BBGKY :**

$$f_N^{(s)}(t) = \sum_{n=0}^{N-s} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \mathcal{S}_{s+1}(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2} \dots \mathcal{S}_{s+n}(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1.$$

**Les séries de Boltzmann :**

$$g^{(s)}(t) = \sum_{n \geq 0} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{S}_s^0(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1}^0 \mathcal{S}_{s+1}^0(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2}^0 \dots \mathcal{S}_{s+n}^0(t_n) g^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1$$

# Stratégie de la preuve

- 1 Borne sur les séries.
- 2 Convergence terme à terme dans les séries.

**Stratégie** = **Interprétation géométrique** des termes.

**Les séries BBGKY :**

$$f_N^{(s)}(t) = \sum_{n=0}^{N-s} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \mathcal{S}_{s+1}(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2} \dots \mathcal{S}_{s+n}(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1.$$

**Les séries de Boltzmann :**

$$g^{(s)}(t) = \sum_{n \geq 0} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{S}_s^0(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1}^0 \mathcal{S}_{s+1}^0(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2}^0 \dots \mathcal{S}_{s+n}^0(t_n) g^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1$$

**Notion clé : pseudo-trajectoires.** [Aller](#)



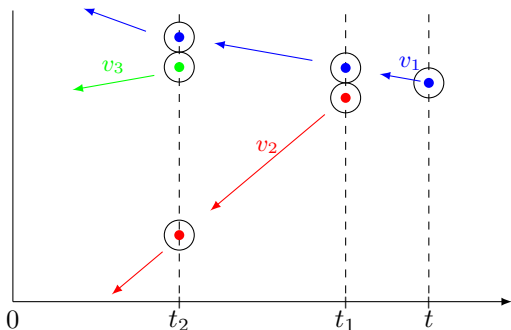


FIGURE : Représentation d'une **pseudo-trajectoire** associée au terme  $\int_0^t \int_0^{t_1} \mathcal{S}_1(t-t_1) \mathcal{C}_{1,2} \mathcal{S}_2(t_1-t_2) \mathcal{C}_{2,3} \mathcal{S}_3(t_2) f_N^{(3)}(0) dt_2 dt_1$  pour la hiérarchie BBGKY.

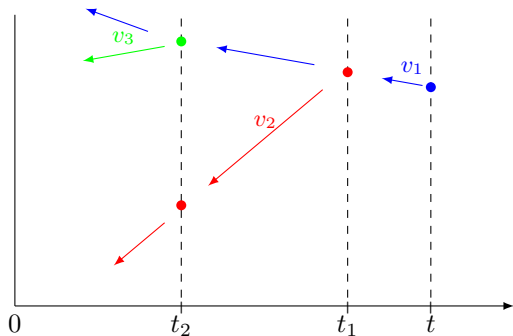


FIGURE : Représentation d'une **pseudo-trajectoire** associée au terme  $\int_0^t \int_0^{t_1} \mathcal{S}_1^0(t-t_1) \mathcal{C}_{1,2}^0 \mathcal{S}_2^0(t_1-t_2) \mathcal{C}_{2,3}^0 \mathcal{S}_3^0(t_2) f_N^{(3)}(0) dt_2 dt_1$  pour la hiérarchie de Boltzmann .

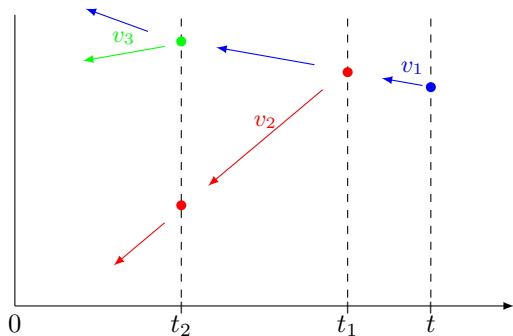


FIGURE : Représentation d'une **pseudo-trajectoire** associée au terme  $\int_0^t \int_0^{t_1} \mathcal{S}_1^0(t-t_1) \mathcal{C}_{1,2}^0 \mathcal{S}_2^0(t_1-t_2) \mathcal{C}_{2,3}^0 \mathcal{S}_3^0(t_2) f_N^{(3)}(0) dt_2 dt_1$  pour la hiérarchie de Boltzmann .

**Stratégie** : **Couplage** des pseudo-trajectoires.

# Recollision

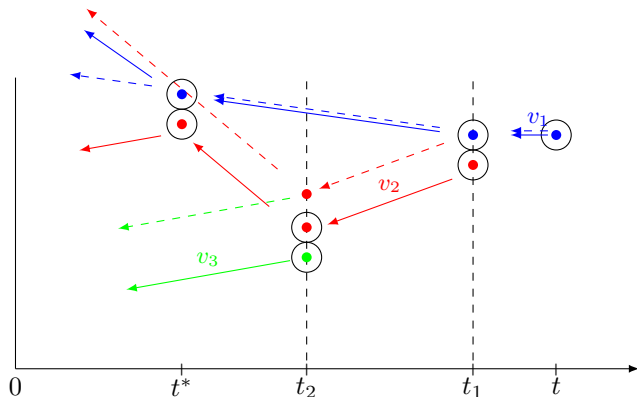


Figure : Un exemple de recollision entre les particules 1 et 2 au temps  $t^*$ .

# Recollision

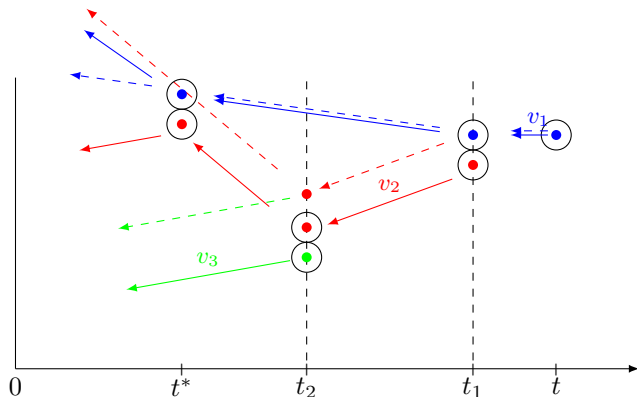


Figure : Un exemple de recollision entre les particules 1 et 2 au temps  $t^*$ .

**Stratégie : Contrôle géométrique** des recollisions.

# Élimination des recollisions

Notion de **bonnes configurations**.

## Définition

L'ensemble des “**bonnes configurations**” de  $k$  particules  $\mathcal{G}_k(\varepsilon_0)$  est défini comme suit :

$$\mathcal{G}_k(\varepsilon_0) := \{(X_k, V_k) \in \mathbf{R}^{dk} \times B_R^k \mid \forall \tau \geq 0 \forall i \neq j \mid x_i - x_j - \tau(v_i - v_j) \mid \geq \varepsilon_0\}.$$

En particulier, les  $k$  particules ne collisionnent pas.

# Élimination des recollisions

Notion de **bonnes configurations**.

## Définition

L'ensemble des “**bonnes configurations**” de  $k$  particules  $\mathcal{G}_k(\varepsilon_0)$  est défini comme suit :

$$\mathcal{G}_k(\varepsilon_0) := \{(X_k, V_k) \in \mathbf{R}^{dk} \times B_R^k \mid \forall \tau \geq 0 \forall i \neq j \mid x_i - x_j - \tau(v_i - v_j) \mid \geq \varepsilon_0\}.$$

En particulier, les  $k$  particules ne collisionnent pas.

**But :** montrer la **stabilité des bonnes configurations par adjonction d'une particule** en position de collision si l'**angle de déviation** et la **vitesse** de la particule additionnelle sont pris **en dehors d'un petit ensemble pathologique**.

# Élimination des recollisions

Notion de **bonnes configurations**.

## Définition

L'ensemble des “**bonnes configurations**” de  $k$  particules  $\mathcal{G}_k(\varepsilon_0)$  est défini comme suit :

$$\mathcal{G}_k(\varepsilon_0) := \{(X_k, V_k) \in \mathbf{R}^{dk} \times B_R^k \mid \forall \tau \geq 0 \forall i \neq j |x_i - x_j - \tau(v_i - v_j)| \geq \varepsilon_0\}.$$

En particulier, les  $k$  particules ne collisionnent pas.

**But :** montrer la **stabilité des bonnes configurations par adjonction d'une particule** en position de collision si l'**angle de déviation** et la **vitesse** de la particule additionnelle sont pris **en dehors d'un petit ensemble pathologique**.

Soit  $\overline{Z}_k \in \mathcal{G}_k(\varepsilon_0)$ , on note  $B_k(\overline{Z}_k) \subset \mathcal{S}^{d-1} \times B_R$  cet ensemble :  
 $k$  particules en bonne configuration  $\longrightarrow$  après un délai  $\delta$ , les  $k + 1$  particules en bonne configuration.



# Preuve de convergence

On s'intéresse aux **observables** :

$$I_s(t)(X_s) := \int \varphi_s(V_s) f_N^{(s)}(t, Z_s) dV_s,$$

$$I_s^0(t)(X_s) := \int \varphi_s(V_s) f^{(s)}(t, Z_s) dV_s.$$

On note

$$f_N^{(s,k)}(t) := \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \mathcal{S}_{s+1}(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2} \dots \mathcal{S}_{s+k}(t_k) f_N^{(s+k)}(0) dt_k \dots dt_1$$

et

$$I_{s,k}(t)(X_s) := \int \varphi_s(V_s) f_N^{(s,k)}(t, Z_s) dV_s.$$

# Stratégie

- On veut se ramener à une dynamique :
  - impliquant seulement un **nombre fini de particules**,
  - dont l'**énergie** est **bornée** (et vaut au plus  $R^2$ ),
  - telles que les collisions soient séparées au moins par un **décal**  $\delta$ ,
  - qui ne subit **pas de recollisions**.

# Stratégie

- On veut se ramener à une dynamique :
  - impliquant seulement un **nombre fini de particules**,
  - dont l'**énergie** est **bornée** (et vaut au plus  $R^2$ ),
  - telles que les collisions soient séparées au moins par un **décal**  $\delta$ ,
  - qui ne subit **pas de recollisions**.
- **Terme principal** sans situations pathologiques **converge** vers **Boltzmann**.
- **Restes disparaissent** quand on passe à la limite.

## i) Nombre fini de particules impliquées

$$\|I_s - \sum_{k=0}^n I_{s,k}(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{ds})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

## i) Nombre fini de particules impliquées

$$\|I_s - \sum_{k=0}^n I_{s,k}(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{d_s})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

## ii) Énergie bornée

$$I_{s,k}^R(t) := \int \varphi_s(V_s) \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \mathcal{S}_s(t - t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \mathcal{S}_{s+1}(t_1 - t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2} \dots \\ \dots \mathcal{S}_{s+k}(t_k) \mathbf{1}_{\{E_0(Z_{s+k}) \leq R^2\}} f_N^{(s+k)}(0) dt_k \dots dt_1 dV_s$$

## i) Nombre fini de particules impliquées

$$\|I_s - \sum_{k=0}^n I_{s,k}(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{ds})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

## ii) Énergie bornée

$$I_{s,k}^R(t) := \int \varphi_s(V_s) \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \mathcal{S}_{s+1}(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2} \dots \\ \dots \mathcal{S}_{s+k}(t_k) \mathbf{1}_{\{E_0(Z_{s+k}) \leq R^2\}} f_N^{(s+k)}(0) dt_k \dots dt_1 dV_s$$

## iii) Délai $\delta$

$$I_{s,k}^{R,\delta}(t) := \int \varphi_s(V_s) \int_{\mathcal{T}_{k,\delta}(t)} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \mathcal{S}_{s+1}(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2} \dots \\ \dots \mathcal{S}_{s+k}(t_k) \mathbf{1}_{\{E_0(Z_{s+k}) \leq R^2\}} f_N^{(s+k)}(0) dT_k dV_s$$

avec

$$\mathcal{T}_k(t) := \{T_k = (t_1, \dots, t_k) \mid t_i < t_{i-1} \text{ avec } t_{k+1} = 0 \text{ et } t_0 = t\}$$

et

$$\mathcal{T}_{k,\delta}(t) := \{T_k \in \mathcal{T}_k(t) \mid t_i - t_{i+1} \geq \delta\}.$$

# Fonctions élémentaires et pseudo-trajectoires

## Fonction élémentaire :

$$I_{s,k}^{R,\delta}(t, J, M)(X_s) := \int \varphi_s(V_s) \int_{\mathcal{T}_{k,\delta}(t)} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1}^{j_1, m_1} \mathcal{S}_{s+1}(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2}^{j_2, m_2} \cdots \\ \cdots \mathcal{S}_{s+k}(t_k) \mathbf{1}_{\{E_0(Z_{s+k}) \leq R^2\}} f_N^{(s+k)}(0) dT_k dV_s$$

avec  $J := (j_1, \dots, j_k) \in \{+, -\}^k$ ,  $M := (m_1, \dots, m_k)$  et  $m_i \in \{1, \dots, s+i-1\}$ .

# Fonctions élémentaires et pseudo-trajectoires

## Fonction élémentaire :

$$I_{s,k}^{R,\delta}(t, J, M)(X_s) := \int \varphi_s(V_s) \int_{\mathcal{T}_{k,\delta}(t)} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1}^{j_1, m_1} \mathcal{S}_{s+1}(t_1-t_2) \mathcal{C}_{s+1,s+2}^{j_2, m_2} \cdots \\ \cdots \mathcal{S}_{s+k}(t_k) \mathbf{1}_{\{E_0(Z_{s+k}) \leq R^2\}} f_N^{(s+k)}(0) dT_k dV_s$$

avec  $J := (j_1, \dots, j_k) \in \{+, -\}^k$ ,  $M := (m_1, \dots, m_k)$  et  $m_i \in \{1, \dots, s+i-1\}$ .

## iv) Absence de recollisions

$$J_{s,k}^{R,\delta}(t, J, M)(X_s) := \frac{(N-s)!}{(N-s-k)!} \varepsilon^{k(d-1)} \int_{B_R \setminus \mathcal{M}_s(X_s)} dV_s \varphi_s(V_s) \int_{\mathcal{T}_{k,\delta}(t)} dT_k \\ \times \int_{c_{B_s^{m_1}}(Z_s^0(t_1))} d\nu_{s+1} d\nu_{s+1} (\nu_{s+1} \cdot (v_{s+1} - v_{m_1}(t_1)))_{j_1} \\ \times \dots \int_{c_{B_{s+k-1}^{m_1}}(Z_{s+k-1}^0(t_k))} d\nu_{s+k} d\nu_{s+k} (\nu_{s+k} \cdot (v_{s+k} - v_{m_k}(t_k)))_{j_k} \\ \mathbf{1}_{\{E_0(Z_{s+k} \leq R^2)\}} \times f_N^{0(s+k)}(Z_{s+k}(0)).$$



## BBGKY :

$$\begin{aligned} J_{s,k}^{R,\delta}(t, J, M)(X_s) &:= \frac{(N-s)!}{(N-s-k)!} \varepsilon^{k(d-1)} \int_{B_R \setminus \mathcal{M}_s(X_s)} dV_s \varphi_s(V_s) \int_{\mathcal{T}_{k,\delta}(t)} dT_k \\ &\quad \times \int_{\mathring{c}B_s^{m_1}(Z_s^0(t_1))} d\nu_{s+1} d\nu_{s+1} (\nu_{s+1} \cdot (v_{s+1} - v_{m_1}(t_1)))_{j_1} \\ &\quad \times \dots \int_{\mathring{c}B_{s+k-1}^{m_1}(Z_{s+k-1}^0(t_k))} d\nu_{s+k} d\nu_{s+k} (\nu_{s+k} \cdot (v_{s+k} - v_{m_k}(t_k)))_{j_k} \\ &\quad \mathbf{1}_{\{E_0(Z_{s+k} \leq R^2)\}} \times f_N^{0(s+k)}(Z_{s+k}(0)). \end{aligned}$$

## Boltzmann :

$$\begin{aligned} J_{s,k}^{0,R,\delta}(t, J, M)(X_s) &:= \int_{B_R \setminus \mathcal{M}_s(X_s)} dV_s \varphi_s(V_s) \int_{\mathcal{T}_{k,\delta}(t)} dT_k \\ &\quad \times \int_{\mathring{c}B_s^{m_1}(Z_s^0(t_1))} d\nu_{s+1} d\nu_{s+1} (\nu_{s+1} \cdot (v_{s+1} - v_{m_1}(t_1)))_{j_1} \\ &\quad \times \dots \int_{\mathring{c}B_{s+k-1}^{m_1}(Z_{s+k-1}^0(t_k))} d\nu_{s+k} d\nu_{s+k} (\nu_{s+k} \cdot (v_{s+k} - v_{m_k}(t_k)))_{j_k} \\ &\quad \mathbf{1}_{\{E_0(Z_{s+k} \leq R^2)\}} \times f_N^{0(s+k)}(Z_{s+k}^0(0)). \end{aligned}$$

## Différences :

- Donnée initiale :  $f_N^{0(s)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f^{0(s)}$ .
- Préfacteur : **scaling Boltzmann-Grad**.
- Pseudo-trajectoires :  
 $|X_{s+k}(0) - X_{s+k}^0(0)| \leq Ck\varepsilon$  et  $V_{s+k}(0) = V_{s+k}^0(0)$  et  $f^{0(s+k)}$  **continue**.

## Pour aller plus loin ...

- **Dépasser la validité en temps court** : le cas de la **particule marquée**  
⇒ dérivation de l'équation de **Boltzmann linéaire**.

## Pour aller plus loin ...

- **Dépasser la validité en temps court** : le cas de la **particule marquée**  
⇒ dérivation de l'équation de **Boltzmann linéaire**.
- **Gaz de Lorentz** : particule marquée dans un environnement figé avec obstacles distribués aléatoirement et sans dynamique ⇒ résultat de **convergence** vers l'équation de **Boltzmann linéaire** [Gallavoti (1972)].

### Équation de Boltzmann linéaire

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \int \int [f(v') M_\beta(v'_1) - f(v) M_\beta(v_1)] b(v - v_1, \sigma) d\sigma dv_1$$

avec  $M_\beta(v) := \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}|v|^2\right)$ ,  $\beta > 0$ .

# Cas de la particule marquée

- La **particule 1 se distingue** des autres, i.e.  $f_N$  est symétrique par rapport à  $z_2, \dots, z_N$  mais pas  $z_1$ .

- **Idée** : Donnée initiale = **équilibre perturbé** en la **1ère particule**.

Pour  $\beta > 0$ ,

$$M_{N,\beta} = \frac{1}{\overline{Z}_N} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{dN}{2}} \exp(-\beta H_N) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_N}$$

avec

$$\overline{Z}_N := \int_{\mathbf{T}^{dN} \times \mathbf{R}^{dN}} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{dN}{2}} \exp(-\beta H_N) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_N}$$

$$\text{et } H_N(Z_N) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |v_i|^2.$$

## Donnée initiale pour l'équation de Liouville :

$$f_N^0(Z_N) := \frac{1}{Z_N} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{dN}{2}} \exp(-\beta H_N) \varphi_N^0(z_1) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_N}$$

avec

$$Z_N := \int_{\mathbf{T}^{dN} \times \mathbf{R}^{dN}} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{dN}{2}} \exp(-\beta H_N) \varphi_N^0(z_1) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_N}.$$

**Donnée initiale** pour l'équation de **Liouville** :

$$f_N^0(Z_N) := \frac{1}{Z_N} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{dN}{2}} \exp(-\beta H_N) \varphi_N^0(z_1) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_N}$$

avec

$$Z_N := \int_{\mathbf{T}^{dN} \times \mathbf{R}^{dN}} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{dN}{2}} \exp(-\beta H_N) \varphi_N^0(z_1) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_N}.$$

**Donnée initiale** pour l'équation de **Boltzmann linéaire** :

$$g_N^0(z_1) := \left( \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}} M_\beta(v) \varphi_N^0(z) dz \right)^{-1} M_\beta(v_1) \varphi_N^0(z_1).$$

**Donnée initiale** pour l'équation de **Liouville** :

$$f_N^0(Z_N) := \frac{1}{Z_N} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{dN}{2}} \exp(-\beta H_N) \varphi_N^0(z_1) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_N}$$

avec

$$Z_N := \int_{\mathbf{T}^{dN} \times \mathbf{R}^{dN}} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{dN}{2}} \exp(-\beta H_N) \varphi_N^0(z_1) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_N}.$$

**Donnée initiale** pour l'équation de **Boltzmann linéaire** :

$$g_N^0(z_1) := \left( \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}} M_\beta(v) \varphi_N^0(z) dz \right)^{-1} M_\beta(v_1) \varphi_N^0(z_1).$$

Dans le cas où

$$g_N^{(s)}(Z_s) := \left( \prod_{i=2}^s M_\beta(v_i) \right) g_N(t, z_1)$$

avec donnée initiale précédente alors :

$g_N^{(s)}$  solution de la **hiérarchie de Boltzmann** si  $g_N$  est solution de l'équation de **Boltzmann linéaire**.



- **Résultat :**

$$\|f_N^{(1)} - g_N\|_{L^\infty([0, t_N] \times \mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

avec  $t_N = o(\log \log N)$ .

- **Stratégie :**

- **estimations à la Cauchy-Kowaleski** remplacés par des **estimations a priori** obtenues grâce au **principe du maximum** (estimations **globales** en temps),
- **contrôle** du **processus de collision**.

# Un processus d'élagage

## Definition

Soit  $h > 0$  et on note  $t := Kh$  pour  $K$  un entier. On divise  $[0, t]$  en  $\cup_{1 \leq k \leq K} [(k-1)h, kh]$ . On appelle **un arbre de collision “de taille contrôlée”** un arbre de collision tel qu'on a **moins de**  $n_k = 2^k$  **points de branchement** sur l'intervalle  $[t - kh, t - (k-1)h]$ .

On appelle **un arbre de collision à croissance super-exponentielle** un arbre de collision qui ne satisfait la propriété du dessus.

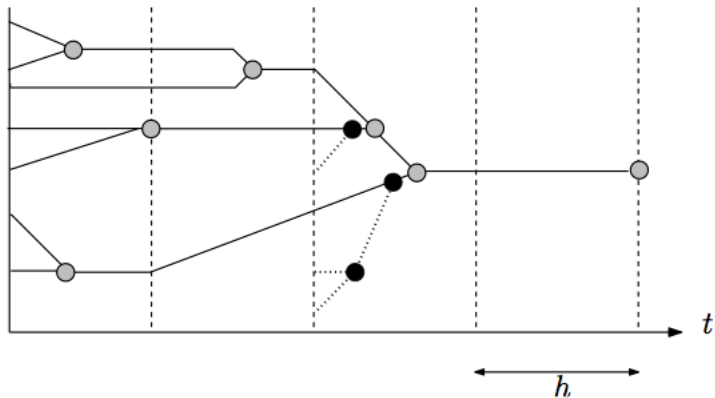


Figure : Un **arbre super-exponentiel** (Source : *The Brownian Motion as the limit of a deterministic system of hard-spheres*, Bodineau et al).

# Conclusion

- Résultats de **dérivation de l'équation de Boltzmann** et Boltzmann linéaire en partant des sphères dures.
- Résultats restent valables pour un certain type de **potentiels à courte portée** i.e. à support compact  $B(0, \varepsilon)$ .

# Conclusion

- Résultats de **dérivation de l'équation de Boltzmann** et Boltzmann linéaire en partant des sphères dures.
- Résultats restent valables pour un certain type de **potentiels à courte portée** i.e. à support compact  $B(0, \varepsilon)$ .
- Interprétation de la dérivation de l'équation de Boltzmann comme une **loi des grands nombres**. Mais qu'en est-il alors du **théorème centrale limite** ?

# Conclusion

- Résultats de **dérivation de l'équation de Boltzmann** et Boltzmann linéaire en partant des sphères dures.
- Résultats restent valables pour un certain type de **potentiels à courte portée** i.e. à support compact  $B(0, \varepsilon)$ .
- Interprétation de la dérivation de l'équation de Boltzmann comme une **loi des grands nombres**. Mais qu'en est-il alors du **théorème centrale limite** ?

Étude des fluctuations  $\Rightarrow$  exposé de François Golse demain !

**Merci de votre attention.**