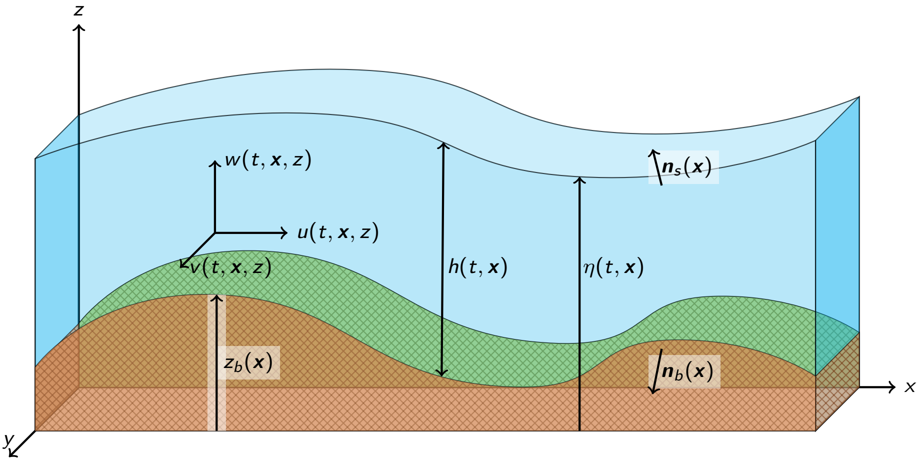
Hyperbolicité des équations d'Euler à surface libre et des modèles multi-couche associés

Bernard DI MARTINO

Université de Corse - UMR Sciences pour l'Environnement - Equipe Ange

Travail en collaboration avec
Chourouk El Hassanieh, Edwige Godlewski, Julien Guillod, Jacques Sainte-Marie

Ecoulement à surface libre



Domaine d'étude $\boldsymbol{x} = (x, y)$ and $\boldsymbol{u} = (u, v)$.

Le modèle de base

Equations d'Euler hydrostatique à surface libre

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$

u Vitesse horizontale
w vitesse verticale
η surface libre

associées à une condition cinématique à la surface et de non pénétration au fond

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s\frac{\partial \eta}{\partial x} - w_s = 0, \qquad u_b\frac{\partial z_b}{\partial x} - w_b = 0.$$

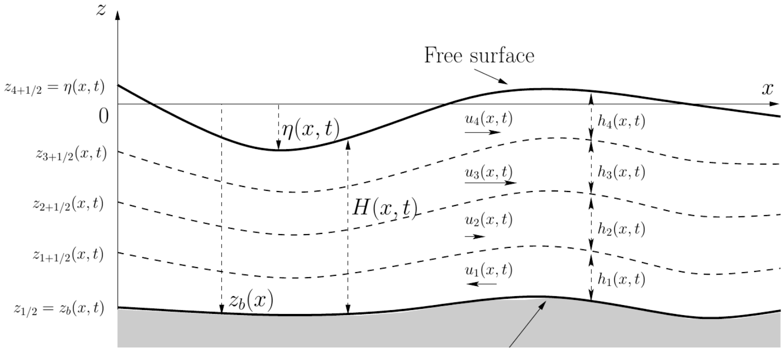
L'équation d'énergie donne

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_b}^{\eta} E\ dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{z_b}^{\eta} u\Big(E + p\Big)dz = 0,$$

avec

$$E = \frac{u^2}{2} + gz.$$

Notations du modèle discrétisé P0



Notations pour le domaine multicouche

Discrétisation verticale

Equations d'Euler du modèle multi-couche
Modèle à N couches avec une approximation P^0

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial (h_\alpha u_\alpha)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial (h_\alpha u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(h_\alpha u_\alpha^2 + \frac{g}{2 l_\alpha} h_\alpha^2\right) = -g h_\alpha \frac{\partial z_b}{\partial x} + u_{\alpha+1/2} G_{\alpha+1/2} - u_{\alpha-1/2} G_{\alpha-1/2},$$

où la valeur de $G_{\alpha+1/2}$ est donnée par

$$G_{\alpha+1/2} = \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{\partial h_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{\partial (h_j u_j)}{\partial x}, \qquad G_{1/2} = 0, \quad G_{N+1/2} = 0.$$

Ce système vérifie l'équilibre énergétique :

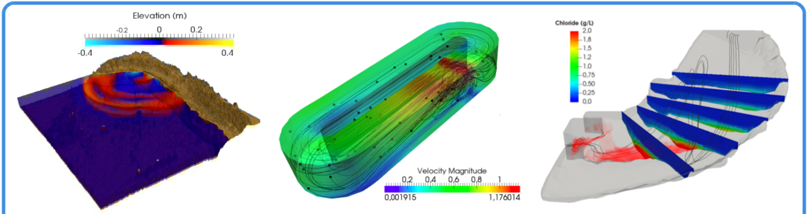
$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_\alpha \left(E_\alpha + \frac{g}{2} h_\alpha h\right)\right) = \frac{u_{\alpha+1/2}^2}{2} G_{\alpha+1/2} - \frac{u_{\alpha-1/2}^2}{2} G_{\alpha-1/2} - \frac{(u_{\alpha+1/2} - u_\alpha)^2}{2} G_{\alpha+1/2} + \frac{(u_{\alpha-1/2} - u_\alpha)^2}{2} G_{\alpha-1/2},$$

avec,

$$E_\alpha = \frac{h_\alpha u_\alpha^2}{2} + \frac{g}{2} h_\alpha h + g h_\alpha z_b.$$

Quelques exemples d'application

Logiciel Freshkiss Méthode des volumes finis avec interprétation cinétique.

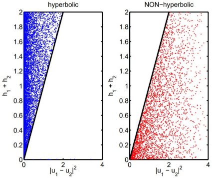


Tsunami simulations (Chili -2014) Algae Lagrangian tracking in raceway ponds Haline stratification and density currents

Quelques résultats connexes :

Cas visqueux : Existence de solutions globales
Global stability of weak solutions for a multilayer Saint-Venant model with interactions between layers. B. D M, B. Hastot, Y. Penel. Nonlinear Analysis (163), pp 177-200 (2017).

Cas de couches non miscibles : possible perte d'hyperbolicité dès 2 couches
On the hyperbolicity of two-and three-layer shallow water equations. M.Castro, J.Thies Frings, S. Noelle, C. Parés, G. Puppo, book : Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications (In 2 Volumes) Pages 337-345 (2012)



Perte d'hyperbolicité si $\dfrac{(u_2 - u_1)^2}{g'(h_1 + h_2)} > 1.$

Approche directe sur le problème discrétisé

Cas $N = 1$: Saint-Venant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \partial_x(hu) = 0 \\ \dfrac{\partial (hu)}{\partial t} + \partial_x \left(hu^2 + \dfrac{gh^2}{2} \right) = -gh\partial_x z_b \end{cases}$$

h water height
u averaged velocity
z_b bottom topography

Soit $h > 0$ et $z_b = Cte$. Les équations peuvent se mettre sous la forme :

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0,$$

où

$$A(U) := \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}.$$

Le système est strictement *hyperbolique* : $A(U)$ admet 2 valeurs propres réelles et distinctes, $u - \sqrt{gh}, u + \sqrt{gh}$.

Approche directe sur le problème discrétisé

Cas $N = 2$: modèle bi-couche

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial(h_\alpha u_\alpha)}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 u_1^2 + \frac{g}{2l_1} h_1^2\right) = -g h_1 \frac{\partial z_b}{\partial x} + u_{3/2} G_{3/2},\\
&\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(h_2 u_2^2 + \frac{g}{2l_2} h_2^2\right) = -g h_2 \frac{\partial z_b}{\partial x} - u_{3/2} G_{3/2},
\end{aligned}
$$

où la valeur de $G_{3/2}$ est donnée par

$$
G_{3/2} = \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x},
$$

Etudié par N. Aguillon, E. Audusse, E. Godlewski, M. Parisot (2017)
En dim 1 :$A(U)$ admet 3 valeurs propres réelles distinctes,

$$
\frac{u_1+u_2}{2} - \sqrt{gh + \frac{3}{4}(u_2-u_1)^2}, \qquad \frac{u_1+u_2}{2}, \qquad \frac{u_1+u_2}{2} + \sqrt{gh + \frac{3}{4}(u_2-u_1)^2}
$$

et le système est strictement hyperbolique.

APPROCHE DIRECTE SUR LE PROBLÈME DISCRÉTISÉ

Cas $N > 2$

On peut réécrire le système en posant $h_\alpha = \frac{h}{N}$, $y_\alpha = \sum_{j=1}^{\alpha} h_j u_j$, $d_\alpha = -\frac{\alpha}{N} u_{\alpha+1/2}$, $c_\alpha = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{\alpha}(gh - u_j^2)$:

$$\mathcal{M}_{N+1}\frac{\partial X_{N+1}}{\partial t} + \mathcal{A}_{N+1}\frac{\partial X_{N+1}}{\partial x} = 0,$$

avec

$$X_{N+1} = \begin{pmatrix} h \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M}_{N+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ d_1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ d_2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ d_N & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_1 & 2u_1 - u_{3/2} & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 2(u_1 - u_2) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 2(u_1 - u_2) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c_N & 2(u_1 - u_2) & \dots & 2(u_{N-1} - u_N) & 2u_N - u_{N+1/2} \end{pmatrix},$$

Approche directe sur le problème discrétisé

$$\begin{aligned}
\chi_{N+1}(\lambda) &= \det(\mathcal{A}_{N+1} - \lambda \mathcal{M}_{N+1}) \\
&= \begin{vmatrix}
-\lambda & 0 & \dots & 0 & 1 \\
c_1 - \lambda d_1 & u_{\lambda,1+} & 0 & \dots & 0 \\
c_2 - \lambda d_2 & 2(u_1 - u_2) & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & 2(u_1 - u_2) & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
c_N - \lambda d_N & 2(u_1 - u_2) & \dots & 2(u_{N-1} - u_N) & u_{\lambda,N+}
\end{vmatrix},
\end{aligned}$$

où $u_{\lambda,i+} = 2u_i - u_{i+1/2} - \lambda$. Et après quelques longs calculs :

$$\begin{aligned}
\chi_{N+1}(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N-1} 2(c_\alpha - \lambda d_\alpha)(u_\alpha - u_{\alpha+1}) \prod_{k=\alpha+1}^{N-1} \left[u_{\lambda,k+} - 2(u_k - u_{k+1})\right] \prod_{j=1}^{\alpha-1} u_{\lambda,j+} \\
- (c_N - \lambda d_N) \prod_{\alpha=1}^{N-1} u_{\lambda,\alpha+} - \lambda \prod_{\alpha=1}^{N} u_{\lambda,\alpha+}.
\end{aligned}$$

Problème : Que faire avec une telle expression ?

Quelques cas particuliers

Proposition

Si $u_i = \bar{u}, \forall i$ (hypothèse de shallow water), les valeurs propres sont $\lambda_1 = \bar{u} - \sqrt{gh}$, $\lambda_i = \bar{u},\ \forall i \in \{2, 3, \dots, N\}$, and $\lambda_{N+1} = \bar{u} + \sqrt{gh}$. Les vecteurs propres sont donnés par e_j, pour $j = 2, \dots, N$ avec

$$e_j = (0, \dots, 0, \delta_{i,j}, 0, \dots, 0)^T, \forall j \in \{2, 3, \dots, N\}$$

et $e_1 = (1, \frac{1}{N}(\bar{u} - \sqrt{gh}), \frac{2}{N}(\bar{u} - \sqrt{gh}), \dots, \bar{u} - \sqrt{gh})^T$,
$e_{N+1} = (1, \frac{1}{N}(\bar{u} + \sqrt{gh}), \dots, \bar{u} + \sqrt{gh})^T$.

Proof.

En posant $u_i = \bar{u}, \forall i$, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_{N+1}(\lambda) =& (-\lambda(2u_N - \lambda) - c_N) \prod_{\alpha=1}^{N-1} u_{\lambda,\alpha+} \\ =& \Big(\lambda^2 - 2\bar{u}\lambda - (gh - \bar{u}^2)\Big)(\bar{u} - \lambda)^{N-1}. \end{aligned}$$

ce qui donne facilement le résultat. $\square$

Profil avec une marche

Proposition

Si pour $1 \leq j_0 < N$,

$$u_\alpha = \bar{u}, \quad \forall \alpha \leq j_0, \quad \text{et} \quad u_\alpha = \bar{u} + \delta\bar{u}, \quad \forall \alpha > j_0,$$

toutes les valeurs propres sont réelles.
Si de plus N est paire ≥ 4 *et* $j_0 = N/2$, *on obtient trois valeurs propres identiques au problème bi-couche, à savoir*

$$\bar{u} + \frac{\delta\bar{u}}{2}, \qquad \bar{u} + \frac{\delta\bar{u}}{2} - \sqrt{gh + 3\frac{\delta\bar{u}^2}{4}}, \qquad \bar{u} + \frac{\delta\bar{u}}{2} + \sqrt{gh + 3\frac{\delta\bar{u}^2}{4}}.$$

Pour les autres valeurs propres, $\frac{N-2}{2}$ *sont égales à* $\bar{u}$ *et* $\frac{N-2}{2}$ *sont égales à* $\bar{u} + \delta\bar{u}$.

Profil linéaire

On suppose que l'on a un profil de vitesse donné par

$$u_\alpha = u_0 + \frac{\alpha}{N}\delta u, \quad \forall \alpha = 1, \dots, N,$$

Proposition

Le système admet $N+1$ valeurs propres réelles et distinctes.

$$\lambda_1 = \bar{u} - \sqrt{gh + 3\sigma^2} \text{ et } \lambda_{N+1} = \bar{u} + \sqrt{gh + 3\sigma^2}$$

$$\lambda_k = \frac{u_{k-1} + u_k}{2}, \qquad \forall\, 2 < k < N,$$

σ est l'écart type donné par

$$\sigma^2 = \frac{(N^2-1)}{12N^2}\delta u^2$$

On sait traiter quelques autres cas particuliers, mais nous n'avons pas réussi à conclure à des résultats plus généraux $\Rightarrow$ autre approche.

Quelques résultats sur les équations d'Euler à surface libre

→ V. E. Zakharov 1980 "Benney equations and quasi-classical approximation in the method of the inverse problem"

→ V. M. Teshukov 1985 "On the hyperbolicity of long wave equations"

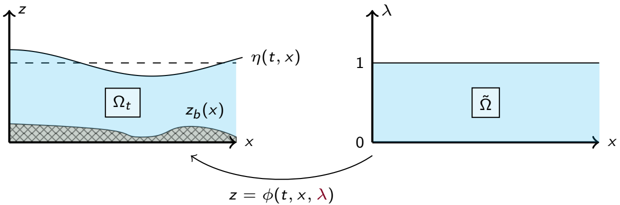
→ V. M. Teshukov 1994 "Long waves in an eddying barotropic fluid"

→ V. M. Teshukov and M. M. Sterkhova 1995 " Characteristic Properties of the System of Equations of a Shear Flow with Non-monotonic Velocity Profile"

→ A. A. Chesnokov, G. A. El, Sergey L. Gavrilyuk, and M. V. Pavlov 2017 "Stability of shear shallow water flows with free surface"

Propriété de la transformation

$\phi = \phi(t, x, \lambda)$ Lagrangian foliation



Soit $\lambda \in (0, 1)$, on condisère la fonction $\phi = \phi(t, \boldsymbol{x}, \lambda)$ solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + u(t, x, \phi)\partial_x \phi = w(t, x, \phi) & \text{in } (0, T) \times \tilde{\Omega} \\ \phi(0, x, \lambda) = \phi_0(x, \lambda) & \text{in } \tilde{\Omega} \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$\phi_0(x, 0) = z_b(x), \qquad \phi_0(x, 1) = \eta_0(x), \qquad \partial_\lambda \phi_0(x, \lambda) > 0.$$

Transformation

$$g(t, x, z) \longrightarrow \tilde{g}(t, x, \lambda) = g(t, x, \phi)$$

Propriétés de la transformation

Theorem

Soit $s \geq 1$, $T > 0$, $p^a = 0$ *et* $z_b \in C_b^s(\mathbb{R}^d)$. *Si* $(\eta, \boldsymbol{u}, w)$ *est une solution telle que* $\eta \in C_b^s((0,T) \times \mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{u} \in C_b^s((0,T) \times \Omega_t)^d$, *et* $w \in C_b^s((0,T) \times \Omega_t)$, *alors pour* $\phi_0 \in C_b^s(\tilde{\Omega})$, *il existe* $T^* \in (0,T]$ *tel que le problème précédent admet une unique solution* $\phi \in C^s((0,T^*) \times \tilde{\Omega})$. *De plus si* $\inf_{(\boldsymbol{x},\lambda)\in\mathbb{R}^d\times I} \partial_\lambda \phi_0(\boldsymbol{x},\lambda) > 0$ *alors, pour* $t \in (0,T^*)$ *we have* $\partial_\lambda \phi(t,\boldsymbol{x},\lambda) > 0$, *et en particulier*

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}, \phi(t)) : \tilde{\Omega} &\to \Omega_t \\ (\boldsymbol{x},\lambda) &\mapsto (\boldsymbol{x}, \phi(t,\boldsymbol{x},\lambda))\end{aligned}$$

est un C^s*-diffeomorphisme préservant l'orientation si* $\phi_0(\boldsymbol{x},0) = z_b(\boldsymbol{x})$ *et* $\phi_0(\boldsymbol{x},1) = \eta_0(\boldsymbol{x})$.

Proof.

Extension de u et w à $\mathbb{R}^d$, méthode des caractéristiques et théorème de Cauchy-Lipschitz. □

On peut en déduire le théorème suivant :

Theorem

Si les conditions du théorème précédent sont vérifiées avec $s \geq 2$, alors les fonctions définies par

$$H(t,\boldsymbol{x},\lambda) = \partial_\lambda \phi(t,\boldsymbol{x},\lambda)\,, \qquad \tilde{\boldsymbol{u}}(t,\boldsymbol{x},\lambda) = \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x},\phi(t,\boldsymbol{x},\lambda))$$

ont la régularité $H \in C^{s-1}((0,T^*)\times\tilde{\Omega})$ et $\tilde{\boldsymbol{u}} \in C^{s}((0,T^*)\times\tilde{\Omega})^d$ et sont solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}}(H\tilde{\boldsymbol{u}}) = 0 & \text{in } (0,T)\times\tilde{\Omega}\,, \\ \dfrac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\tilde{\boldsymbol{u}} + g\nabla_{\boldsymbol{x}}\displaystyle\int_0^1 H\,\mathrm{d}\lambda = -g\nabla_{\boldsymbol{x}} z_b & \text{in } (0,T)\times\tilde{\Omega}\,, \\ H(0,\boldsymbol{x},\lambda) = H_0(\boldsymbol{x},\lambda) & \text{in } \tilde{\Omega}\,, \\ \tilde{\boldsymbol{u}}(0,\boldsymbol{x},\lambda) = \tilde{\boldsymbol{u}}_0(\boldsymbol{x},\lambda) & \text{in } \tilde{\Omega}\,, \end{cases}$$

avec les données initiales

$$H_0(\boldsymbol{x},\lambda) = \partial_\lambda \phi_0(\boldsymbol{x},\lambda), \qquad \tilde{\boldsymbol{u}}_0(\boldsymbol{x},\lambda) = \boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x},\phi_0(\boldsymbol{x},\lambda)).$$

Equivalence

Système initial dans Ω_t

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \partial_x \int_{z_b}^{\eta} u\, dz = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\partial_x u + w\partial_z u + g\partial_x \eta = -g\partial_x z_b$$

Formulation semi lagrangienne dans $\tilde{\Omega} = \mathbb{R} \times [0,1]$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \partial_x (H\tilde{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u}\partial_x \tilde{u} + g\partial_x \int_0^1 H d\lambda = -g\partial_x z_b$$

Lien entre les deux formulations

$$H(t,x,\lambda) := \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t,x,\lambda), \qquad \int_0^1 H(t,x,\lambda)d\lambda = h(t,x) \qquad \tilde{u}(t,x,\lambda) := u(t,x,\phi(t,x,\lambda)).$$

Remarque

Les solutions stationnaires de la seconde formulation sont aussi solutions stationnaires de la première. Mais la réciproque est fausse !

Exemple de solution stationnaire

Si $(\eta, \boldsymbol{u}, w)$ est une solution stationnaire des équations d'Euler telle $\boldsymbol{u}$ ne dépend pas $\boldsymbol{x}$, alors il existe une constante $\eta_0 > 0$ et une fonction $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ suffisamment régulière telle que

$$\eta(t, \boldsymbol{x}) = \eta_0, \qquad \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}, z) = \boldsymbol{f}(z), \qquad w(t, \boldsymbol{x}, z) = 0.$$

Dans ce cas, l'évolution de ϕ devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{f}(\phi) \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi = 0 \\ \phi(0, \boldsymbol{x}, \lambda) = \phi_0(\boldsymbol{x}, \lambda). \end{cases}$$

On considère la condition initiale avec $a \in C_b^1(\mathbb{R})$

$$\phi_0(x, \lambda) = \lambda(\eta_0 + (1 - \lambda) a(x)),$$

Alors $\partial_\lambda \phi_0 > 0$ si $\|a\|_{L^\infty} < \eta_0$. En particulier le cas $\boldsymbol{f}(\phi) = \phi$ correspond à l'équation de Burgers. Le temps T pendant lequel la solution régulière ϕ existe est donnée par la méthode des caractéristiques. Puisque

$$\partial_x \phi_0(x, \lambda) = \lambda(1 - \lambda) a'(x),$$

on obtient

$$\frac{1}{T} = -\lambda(1 - \lambda) \inf\Big(\{0\} \cup a'(\mathbb{R})\Big),$$

Il existe donc pour tout λ un temps critique T après lequel la solution n'est pas bien définie.

Forme quasi linéaire

Formulation semi lagrangienne dans le domaine $\tilde{\Omega} = \mathbb{R} \times [0, 1]$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \partial_x(H\tilde{u}) = 0$$
$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u}\partial_x \tilde{u} + g\partial_x \int_0^1 H d\lambda = 0$$

Formulation quasi linéaire $(z_b = \text{Cst})$

$$\partial_t \tilde{\boldsymbol{U}} + A(\tilde{\boldsymbol{U}})\partial_x \tilde{\boldsymbol{U}} = 0,$$

où

$$A(\tilde{\boldsymbol{U}}) = \begin{pmatrix} \tilde{u} & H \\ g\int_0^1 \cdot \, \mathrm{d}\lambda & \tilde{u} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \tilde{\boldsymbol{U}} = \begin{pmatrix} H \\ \tilde{u} \end{pmatrix}.$$

Remarque

$A(\tilde{\boldsymbol{U}})$ est un operateur non local jouant sur la variable verticale λ

Formulation Semi-Lagrangiene: Spectre

Theorem

Si $\tilde{u} \in C^{0,1/4}(I)$, $H \in C^0(I)$ *et* $H > 0$, *alors le spectre de* $A : L^2(I)^2 \to L^2(I)^2$ *est caractérisé par*

$$\sigma_d(A) = \left\{ c \in \mathbb{C} \setminus \tilde{u}(I) \ : \ \int_0^1 \frac{gH}{(c - \tilde{u})^2} \mathrm{d}\lambda = 1 \right\} ,$$

$$\sigma_e(A) = \tilde{u}(I) \, .$$

$\sigma_d(A_0)$ *est le spectre discret,* $\sigma_e(A_0)$ *le spectre essentiel.*

Remarque

→ V. M. Teshukov 1985 (Définition)

S'il n'y a pas de solution complexe c à $\displaystyle\int_0^1 \frac{gH}{(\tilde{u} - c)^2} d\lambda = 1$, le système est dit hyperbolique.

V. M. Teshukov 1994 (Long Waves in an Eddying Barotropic Fluid)

Pour toute solution régulière, il existe uniquement deux valeurs réelles c solutions de

$$\int_0^1 \frac{gH}{(\tilde{u} - c)^2} d\lambda = 1$$

Référence aux travaux de Benney

D. J. Benney 1973 "Some Properties of Long Nonlinear Waves", in Studies in Applied Mathématics, Vol LII, N°1

$$u_x + v_y = 0, \tag{1.8}$$

$$u_t + uu_x + vu_y = -gh_x, \tag{1.9}$$

$$v = 0, \qquad y = 0, \tag{1.10}$$

$$h_t + uh_x - v = 0, \qquad y = h. \tag{1.11}$$

Special solutions

$$u = u(y, h), \tag{2.1}$$

$$h_t = -c(h)h_x. \tag{2.2}$$

so that the free surface deforms and propagates with speed $c(h)$.

From (1.8) and (1.10) we obtain

$$v = -h_x \int_0^y u_h \, dy, \tag{2.3}$$

and substitution into (1.9) and (1.11) yields

$$\int_0^y u_h \, dy = -g(u-c)\int_0^y \frac{dy}{(u-c)^2}. \tag{2.4}$$

where

$$\int_0^h \frac{dy}{(u-c)^2} = \frac{1}{g}. \tag{2.5}$$

Formulation Semi-Lagrangiene: Spectre

Remarque

La condition apparaissant dans le spectre discret peut s'écrire dans les variables d'origine:

$$1 = \int_0^1 \frac{gH}{(c-\tilde{u})^2} \mathrm{d}\lambda = \int_{z_b}^{\eta} \frac{g}{(c-u)^2} \mathrm{d}z.$$

Remarque

Dans le régime de type shallow water, *i.e.*, lorsque $\tilde{u}$ est indépendant de λ, alors le spectre se réduit à

$$\sigma(A_0) = \left\{ \tilde{u} + \sqrt{gh}, \tilde{u} - \sqrt{gh}, \tilde{u} \right\}, \qquad \text{where} \qquad h = \int_0^1 H \mathrm{d}\lambda = \eta - z_b.$$

Les deux premières valeurs propres $\tilde{u} \pm \sqrt{gh}$ sont les valeurs propres usuelles du système de Saint-Venant.

Formulation Semi-Lagrangiene : localisation du spectre

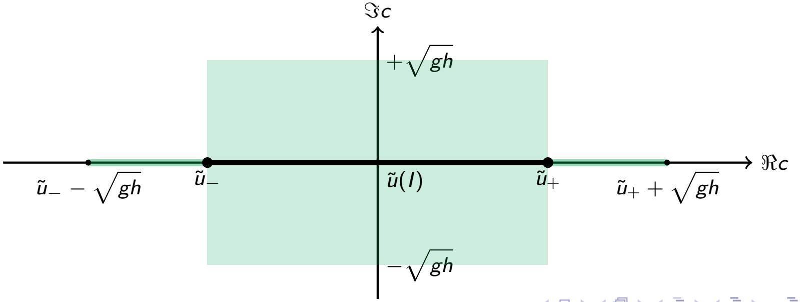
Proposition

Si $\tilde{u} \in C^{0,1/4}(I)$*,* $H \in C^0(I)$ *et* $H > 0$*, le spectre* $\sigma(A_0)$ *est dans l'union des ensembles suivants :*

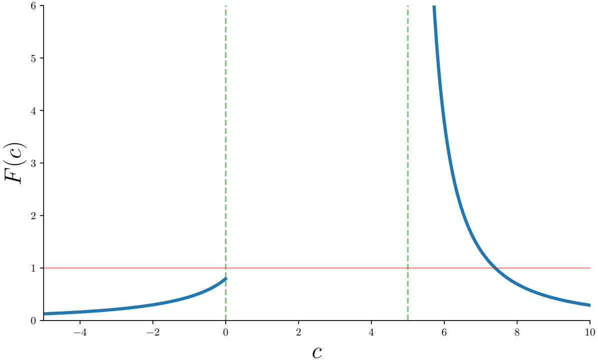
$$J_- = \left[\tilde{u}_- - \sqrt{gh}, \tilde{u}_-\right], \qquad J_+ = \left[\tilde{u}_+, \tilde{u}_+ + \sqrt{gh}\right].$$

$$R = \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \tilde{u}_- \leq \Re z \leq \tilde{u}_+ \text{ and } |\Im z| \leq \sqrt{gh}\right\},$$

où $\tilde{u}_- = \inf_I \tilde{u}$, $\quad \tilde{u}_+ = \sup_I \tilde{u}$, $\quad h = \int_0^1 H \mathrm{d}\lambda$.



Possible absence d'une valeur propre réelle



Le cas limite consiste en $\tilde{u}(\lambda) = K\lambda^{1/4}$, $H(\lambda) = 1$, et $K > \sqrt{g}$ pour $g = 10$.

$$F(c) = \int_0^1 \frac{gH(\lambda)}{(c - \tilde{u}(\lambda))^2} \mathrm{d}\lambda \,.$$

Formulation Semi-Lagrangienne: Discrimination de cas qui fonctionnent

Proposition (Stability Of Shear Shallow Water Flows with Free Surface, Chesnokov, A. A. and El, G. A. and Gavrilyuk, S. L. and Pavlov, M. V.)

(i) *if u is monotonic with $\partial_{zz} u \neq 0$, then the eigenvalues are necessarily real,*

(ii)-a *if u is non-decreasing with $\partial_{zz} u < 0$ for $z \in [0, z_c)$, $\partial_{zz} u|_{z=z_c} = 0$ and $\partial_{zz} u > 0$ for $z \in (z_c, h]$, then the eigenvalues are real,*

(ii)-b *if u is non-increasing with $\partial_{zz} u > 0$ for $z \in [0, z_c)$, $\partial_{zz} u|_{z=z_c} = 0$ and $\partial_{zz} u < 0$ for $z \in (z_c, h]$, then the eigenvalues are real,*

(iii)-a *if u is non-decreasing with $\partial_{zz} u > 0$ for $z \in [0, z_c)$, $\partial_{zz} u|_{z=z_c} = 0$ and $\partial_{zz} u < 0$ for $z \in (z_c, h]$, then one can obtain complex eigenvalues,*

(iii)-b *if u is non-increasing with $\partial_{zz} u < 0$ for $z \in [0, z_c)$, $\partial_{zz} u|_{z=z_c} = 0$ and $\partial_{zz} u > 0$ for $z \in (z_c, h]$, then one can obtain complex eigenvalues.*

Preuve par l'utilisation de la formule de Sokhotski–Plemelj (analyse complexe).

On peut refaire la démonstration juste avec de l'analyse réelle qui permet un passage au cas discret.

Théorème

Si $\tilde{u} \in C^2(I)$ est strictement monotone en λ et $\partial_\lambda \left(H/\partial_\lambda u \right) \neq 0$ alors

$$\sigma_d(A) = \{c_-, c_+\}, \qquad \sigma_e(A) = \tilde{u}(I).$$

$\partial_\lambda \left(H/\partial_\lambda \tilde{u} \right) \neq 0$ est équivalent à $\partial_{zz} u \neq 0$.

Proposition (Contre exemple)

Pour $a \neq 0$ et $b > 0$ tel que

$$b \tanh b > 1, \qquad |a| < \sqrt{1 - (b \tanh b)^{-1}},$$

Le spectre de A_0 pour

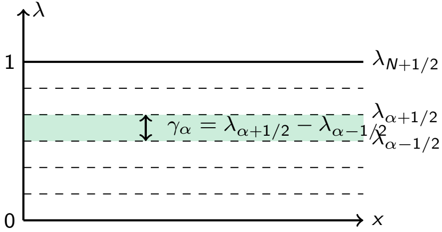
$$H(\lambda) = g^{-1}, \qquad \tilde{u}(\lambda) = a \tanh(b(2\lambda - 1))$$

contient au moins 2 valeurs propres complexes conjuguées telles que $\Re c = 0$ et $\Im c \neq 0$.

Formulation semi-Lagrangienne : Approche multi-couche

On considère une approximation P_0 de $H, \tilde{u}$ pour $\lambda \in I$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_\alpha}{\partial t} + \partial_x (H_\alpha \tilde{u}_\alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial t} + \tilde{u}_\alpha \partial_x \tilde{u}_\alpha + g \partial_x \displaystyle\sum_{\beta=1}^{N} \gamma_\beta H_\beta = -g \partial_x z_b \end{cases}$$



où

$$H(t,x,\lambda) \approx \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbb{1}_{\lambda \in L_\alpha}(\lambda) H_\alpha(t,x), \qquad \tilde{u}(t,x,\lambda) \approx \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbb{1}_{\lambda \in L_\alpha}(\lambda) \tilde{u}_\alpha(t,x).$$

Remarques

- Couches horizontales artificielles.
- Approximation $\mathbb{P}_0-$ exacte.
- Pas de termes d'échange

Formulation matricielle du multi-couche semi lagrangien

Proposition

Le système peut être écrit sous la forme quasi linéaire suivante

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{U}}}{\partial t} + A_N(\tilde{\mathcal{U}})\frac{\partial \tilde{\mathcal{U}}}{\partial x} = \tilde{\boldsymbol{S}},$$

avec $\tilde{\mathcal{U}} = (\boldsymbol{H}_N, \tilde{\boldsymbol{U}}_N)^T$ *et* $\tilde{\boldsymbol{S}} = (\mathbf{0}_N, -g\partial_x z_b \mathbf{1}_N)$ *des vecteurs de dimension* $2N$ *et* $A_N(\tilde{\mathcal{U}})$ *une matrice blocs* 2×2 *définie par*

$$A_N(\tilde{\mathcal{U}}) = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\tilde{\boldsymbol{U}}_N) & \mathrm{diag}(\boldsymbol{H}_N) \\ g\mathbf{1}_N \otimes \gamma_N & \mathrm{diag}(\tilde{\boldsymbol{U}}_N) \end{pmatrix},$$

Proposition

Si $z_b = 0$, $\boldsymbol{H}_N > 0$ *et* $g > 0$ *la matrice* $A_N(\tilde{\mathcal{U}})$ *admet au plus* $2N$ *valeurs propres données par*

$$\sigma(A_N) = \left\{ c \in \mathbb{C} \setminus \tilde{\boldsymbol{U}}_N \ : \ \sum_{i=1}^{N} \frac{g\gamma_i H_i}{(\tilde{u}_i - c)^2} = 1 \right\} \cup \left\{ c \in \tilde{\boldsymbol{U}}_N \ : \ \mathrm{card}\left(\tilde{\boldsymbol{U}}_N^{-1}(c)\}\right) > 1 \right\},$$

où $\tilde{\boldsymbol{U}}_N^{-1}(c) = \left\{ j \in \{1, \ldots, N\} \ : \ \tilde{u}_j = c \right\}$ *est l'ensemble des points pour lesquels* $\tilde{u}_j = c$. *Si tous les* $\tilde{u}_i$ *sont distincts, la seconde partie est vide.*

Valeurs propres du multi-couche semi lagrangien

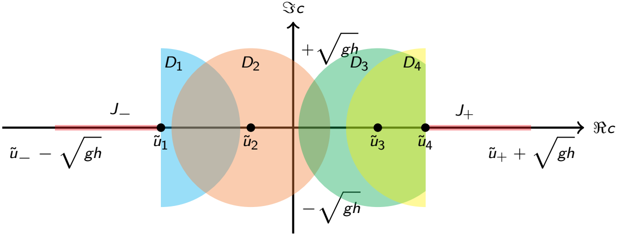
Proposition

Pour $\boldsymbol{H}_N > 0$, les valeures propres $\sigma(A_N)$ de A_N sont contenues dans la réunion des $N+2$ ensembles :

$$J_- = \left[\tilde{u}_- - \sqrt{gh_N}, \tilde{u}_-\right], \qquad J_+ = \left[\tilde{u}_+, \tilde{u}_+ + \sqrt{gh_N}\right],$$

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \tilde{u}_i| \le \sqrt{gh_N} \text{ and } \tilde{u}_- \le \Re z \le \tilde{u}_+ \right\},$$

et il existe exactement deux valeurs propres dans $\sigma(A_N) \cap J_\pm = \{c_\pm\}$.

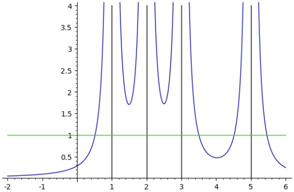


$N = 4$

Valeurs propres du multi-couche semi-lagrangien

Les valeurs propres sont les c solutions de

$$F(c) = \sum_{i=1}^{N} \frac{g\gamma_i H_i}{(\tilde{u}_i - c)^2} = 1$$



Proposition

Si $\boldsymbol{H}_N > 0$, et que l'on a soit :

$\tilde{u}_+ - \tilde{u}_- < \sqrt{gh_N}$, *ou*

$\max_i(|\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i+1}|^2) < 8g \min_i(\gamma_i H_i)$

alors:

$$\sigma(A_N) \cap \mathbb{R} = \{c_-, c_+\} \cup \left\{ c \in \tilde{\boldsymbol{U}}_N \ : \ \text{card}\left(\tilde{\boldsymbol{U}}_N^{-1}(c)\}\right) > 1 \right\},$$

et en particulier si les $\tilde{u}_i$ sont tous distincts $\sigma(A_N) \cap \mathbb{R} = \{c_-, c_+\}$.

Il y a donc dans ce cas $2N - 2$ valeurs propres complexes à partie imaginaire non nulle !

Une sorte de convergence vers le problème continu

Proposition

Soit $H \in C^1(I)$ et $\tilde{u} \in C^2(I)$. Pour tout $N \geq 1$, soit $\{u_i\}_{1 \leq i \leq N}$ and $\{H_i\}_{1 \leq i \leq N}$ l'approximation $\mathbb{P}_0$ en λ de $\tilde{u}$ et H pour $\gamma_\alpha = \frac{1}{N}$. Si $H > 0$ et $\tilde{u}$ est strictement monotone en λ avec $\partial_\lambda(H/\partial_\lambda u) \neq 0$ pour tout $\lambda \in I$, alors pour N suffisamment grand

$$\sup_{c \in \sigma(A_N)} |\Im c| \leq \left(\frac{6gC^3}{N}\right)^{1/4},$$

où $C > 0$ dépend seulement de $\tilde{u}$ et H:

$$C = \max\Big(1, \|H\|_{L^\infty}, \|\partial_\lambda H\|_{L^\infty}, \|\tilde{u}\|_{L^\infty}, \|\partial_\lambda \tilde{u}\|_{L^\infty}\Big).$$

Conclusion

Merci pour votre attention !

Pour plus d'information :
Hyperbolicity of a semi-Lagrangian formulation of the hydrostatic free-surface Euler system. B DM, C. El Hassanieh, E. Godlewski, J. Guillod, J. Sainte-Marie, https://hal.science/hal-04190892