



**Contrôlabilité
lagrangienne
approchée de
l'équation
d'Euler**



Thierry Horsin

Université de Versailles

Paris, LJLL, 13 mars

- ▶ Travail en commun avec Olivier Glass (LJLL) (travail soumis)
- ▶ Travaux en cours avec O. Glass, O. Kavian.

Motivation

- ▶ Travail suggéré par Jean-Pierre Puel: Peut-on combiner la théorie du transport optimal et la théorie de la contrôlabilité ?
Question naturelle sous-jacente: peut-on prescrire le déplacement d'une certaine partie d'un fluide ?

Motivation

- ▶ Application possible:

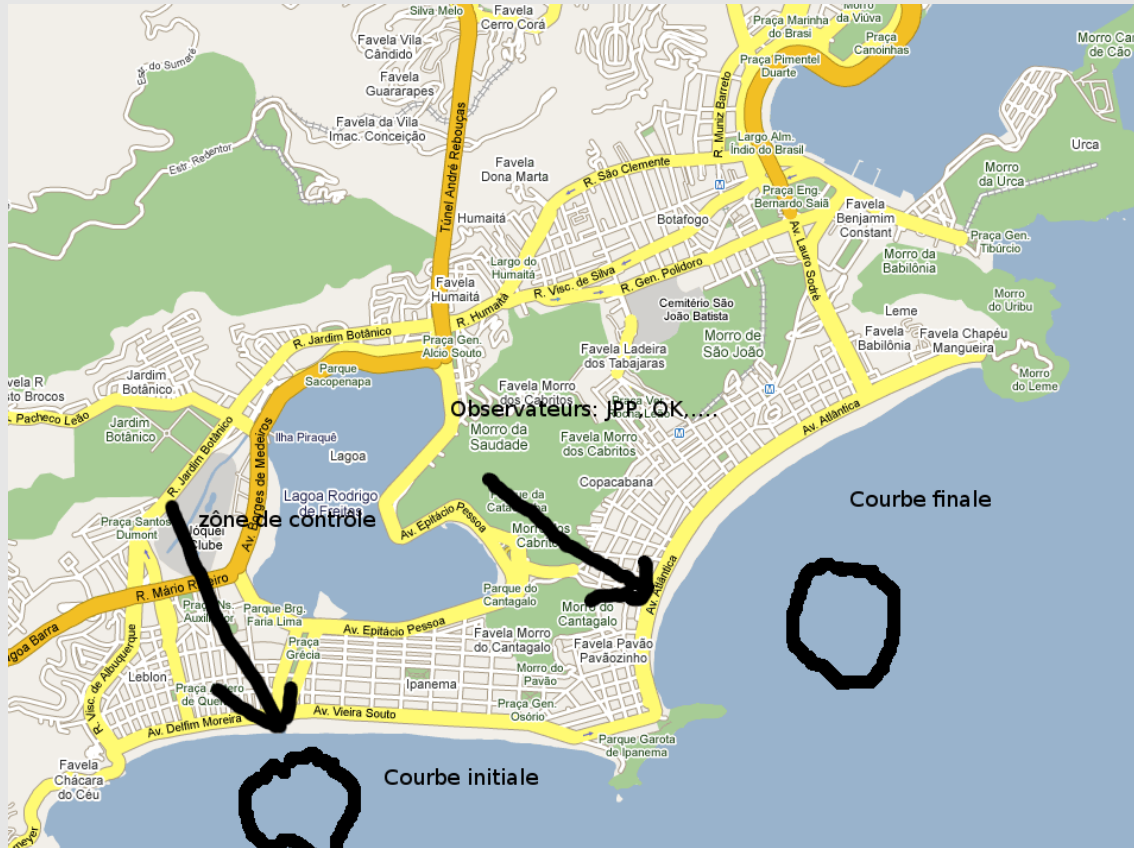


Figure 1

Formulation

- ▶ On se donne un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $T > 0$.

Deux courbes de Jordan γ_0 et γ_1 incluses dans Ω .

Les deux courbes entourent des surfaces ayant la même aire:

$$|\text{int}(\gamma_0)| = |\text{int}(\gamma_1)|.$$

On prend $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Formulation



Figure 2 Une configuration possible

Formulation

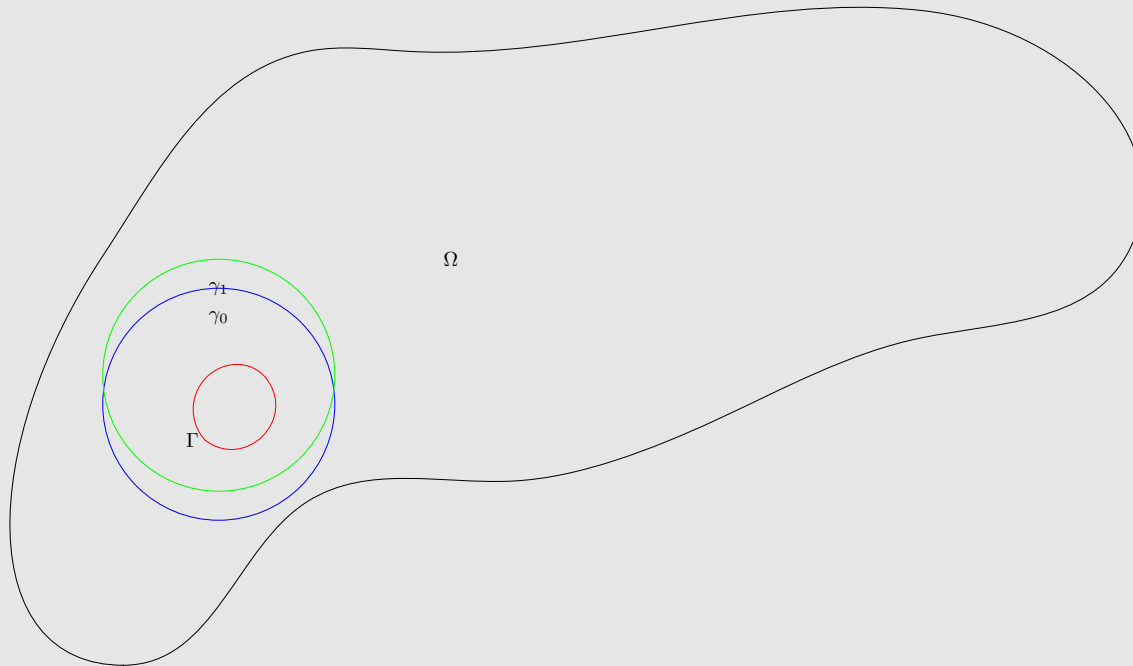


Figure 3 Une autre configuration possible

Formulation

► Soit $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$, avec $\operatorname{div}(u_0) = 0$ et $u_0 \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$.

On considère $u : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $p : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant le système d'Euler (E)

$$(1) \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \quad t > 0 \quad x \in (0, 1)$$

$$(E) \quad (2) u(t = 0, x) = u_0(x)$$

$$(3) u \cdot n = 0, \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \setminus \Gamma$$

$$(4) \operatorname{div}(u) = 0$$

Formulation

- ▶ Le système (E) est bien posé si on impose, par exemple,

$$(5) \quad \begin{cases} u \cdot n \text{ sur } (0, T) \times \Gamma, \int_{\partial\Omega} u \cdot n d\sigma = 0 \\ \operatorname{curl} u \text{ en tout point de } \partial\Omega \text{ tel que } u \cdot n < 0 \end{cases}$$

Formulation

- **Définition:** On dira qu'il y a contrôlabilité lagrangienne (resp. approchée en norme $\| \cdot \|$) entre γ_0 et γ_1 en temps T si (resp. pour tout $\varepsilon > 0$) on peut trouver u solution de (E) telle que le flot φ^u de u défini par

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi^u}{\partial t}(s, t, x) &= u(t, \varphi^u(s, t, x)) \\ \varphi(s, s, x) &= x\end{aligned}$$

vérifie

$$\varphi(0, T, \gamma_0) = \gamma_1.$$

respectivement

$$\|\varphi^u(0, T, \gamma_0) - \gamma_1\| < \varepsilon,$$

à une reparamétrisation près.

L'idée de déplacer des particules est utilisée par JM Coron, Glass, ..., pour démontrer la contrôlabilité en variables eulériennes. En fait la méthode de Coron donne la contrôlabilité exacte mais en autorisant la zone que l'on veut contrôler à sortir du domaine.

L. Rosier a étudié la contrôlabilité en variables lagrangiennes de la surface d'un fluide.

Les travaux récents d'A. Agrachev sont liés à la contrôlabilité lagrangienne.

Contrôlabilité ou pb inverses en systèmes fluides-structures Boulakia-Osses, Imanuvilov-Takahashi, Cumsille-Ortega-Rosier,.....

Burgers et équation de la chaleur. [Horsin]

Résultats

- ▶ On dispose du résultat suivant:

Théorème 1: On suppose que $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, que γ_0 et γ_1 sont de classe C^∞ et que γ_0 et γ_1 entourent les mêmes composantes connexes de $\partial\Omega$ (Ω est supposé connexe). Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il y a contrôlabilité approchée entre γ_0 et γ_1 en temps T , en norme C^k . De plus pour tout $t \in [0, T]$, $\varphi^u(0, t, \gamma_0) \subset \Omega$.

Résultats

- ▶ On dispose du résultat suivant:

Théorème 1: On suppose que $u_0 \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, que γ_0 et γ_1 sont de classe C^∞ et que γ_0 et γ_1 entourent les mêmes composantes connexes de $\partial\Omega$ (Ω est supposé connexe). Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il y a contrôlabilité approchée entre γ_0 et γ_1 en temps T , en norme C^k . De plus pour tout $t \in [0, T]$, $\varphi^u(0, t, \gamma_0) \subset \Omega$.

- ▶ **Remarque 1:** Si on suppose que $\text{curl}u_0 = 0$ dans un voisinage de γ_0 , alors la vorticité étant transportée par la solution de (E) construite elle reste nulle au voisinage de $\varphi^u(0, t, \gamma_0)$ pour tout $t \in [0, T]$. Il s'ensuit que si γ_0 est analytique, il en est de même pour $\varphi^u(0, t, \gamma_0)$. Il ne peut donc y avoir contrôlabilité exacte (il suffit de prendre γ_1 non analytique).

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = 0, \text{ avec } \omega := \text{curl}u.\right)$$

Résultats

- ▶ **Remarque 2:** Contrairement aux travaux sur la contrôlabilité de (E) en description eulérienne (où l'état est la vitesse) [Coron] [Glass],..., on n'a pas besoin de contrôler sur toutes les composantes connexes de $\partial\Omega$.

Résultats

- ▶ **Remarque 2:** Contrairement aux travaux sur la contrôlabilité de (E) en description eulérienne (où l'état est la vitesse) [Coron] [Glass],..., on n'a pas besoin de contrôler sur toutes les composantes connexes de $\partial\Omega$.
- ▶ **Remarque 3:** La solution de (E) construite est C^∞ :-> son flot est parfaitement défini. Tout le fluide entouré par γ_0 est approximativement envoyé dans $\text{Int}(\gamma_1)$.

Résultats

- ▶ Wolibner, Yudovich, Chemin, Depauw, Dutrifoy... ont étudié la propagation de poches de tourbillons:

$$\operatorname{curl}(u)(t, x) = \chi_{\operatorname{Int}(\gamma)}(t, x)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma$$

$$(5\text{bis}) \begin{cases} u \cdot n \text{ donné sur } \Gamma \\ \operatorname{curl} u = 0 \text{ sur } \Gamma \cap \{u \cdot n < 0\} \end{cases}$$

Ce problème est bien posé et si γ_0 est C^∞ alors il en est de même pour $\gamma(t)$ pour tout t .

On a alors le résultat suivant:

Résultats

- **Théorème 2:** Si γ_0 et γ_1 sont C^∞ , et si u_0 est lipschitzienne sur Ω et $u_0.n \in C^\infty(\partial\Omega)$ avec

$$\begin{cases} \operatorname{curl}(u_0) = \chi_{\operatorname{Int}(\gamma_0)} \\ \operatorname{div} u_0 = 0 \text{ dans } \Omega \\ u_0.n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{cases}$$

il existe alors $u \in L^\infty([0, T], \mathcal{Lip}(\overline{\Omega}))$ vérifiant (1) (2) (3) (4) (5bis) dont le flot φ^u vérifie $\varphi^u(0, t, \gamma_0) \subset \Omega$ et

$$\|\varphi^u(0, T, \gamma_0) - \gamma_1\|_{C^k}.$$

Résultats

- ▶ La pierre angulaire permettant la preuve du théorème 1 et 2 est constituée du résultat suivant:

Résultats

- ▶ La pierre angulaire permettant la preuve du théorème 1 et 2 est constituée du résultat suivant:
- ▶ **Théorème 3:** Si γ_0 et γ_1 sont comme dans le théorème 1, il existe $\theta \in C_0^\infty([0, 1]; C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}))$, tel que

$$- \Delta_x \theta = 0 \text{ dans } \Omega \text{ pour tout } t \in [0, 1]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ sur } [0, 1] \times (\partial\Omega \setminus \Gamma)$$

$$\|\varphi^{\nabla\theta}(0, 1, \gamma_0) - \gamma_1\|_{C^k} \leq \varepsilon$$

Résultats

- Pour démontrer le théorème 3, on utilise les résultats suivants:

Théorème 4: Soit γ_0 et γ_1 deux courbes de Jordan C^∞ dont les intérieurs contiennent les mêmes composantes connexes de $\partial\Omega$, il existe alors $v \in C_0^\infty((0, 1) \times \Omega; \mathbb{R}^2)$ avec $\operatorname{div}(v) = 0$ tel que $\varphi^v(0, 1, \gamma_0) = \gamma_1$

Proposition 1: Si γ est une courbe de Jordan C^∞ et X un champ de vecteurs $C^0([0, 1], C^\infty(\overline{\Omega}))$ un champ à divergence nulle avec $X.n = 0$ sur $[0, 1] \times \partial\Omega$. Si l'on pose $\gamma_1 = \varphi^X(0, 1, \gamma_0)$ il existe alors pour tout $\varepsilon > 0$ $\theta \in C^\infty([0, 1] \times \Omega, \mathbb{R})$ harmonique en espace à dérivée normale nulle sur $(\partial\Omega \setminus \Gamma)$, $\varphi^{\nabla\theta}(0, t, \gamma_0) \subset \Omega$ et $\|\gamma_1 - \varphi^{\nabla\theta}(0, 1, \gamma_0)\|_k \leq \varepsilon$.

Idées des preuves



- **Proposition 1.** On commence par supposer que X et γ_0 sont analytiques: On pose $\gamma(t) := \varphi^X(0, t, \gamma_0)$ On peut alors résoudre

$$\begin{cases} \Delta_x \psi(t, x) = 0 \text{ dans } \text{Int}(\gamma(t)) \cap \Omega \text{ (ou } \Omega \setminus \text{Int}(\gamma(t)) \text{ si } \Gamma \cap \text{Int}(\gamma(t)) \neq \emptyset) \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = X.v \text{ sur } \gamma(t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \text{Int}(\gamma(t)) \cap \partial\Omega \end{cases}$$

et prolonger ψ en une fonct. harm. à un vois. de $\text{Int}(\gamma(t))$ (on suppose que $\text{Int}(\gamma(t)) \cap \partial\Omega = \emptyset$) grâce au Th. de Cauchy-Kowalewski (plus exactement une version de C.B. Morrey) et par compacité on peut prendre ce voisinage localement constant en temps, et par ailleurs on a des bornes uniformes localement en temps de l'extension sur le voisinage.

- On utilise alors le thm de Runge pour étendre approxim. ψ sur ce voisinage et 0 sur un voisinage de $\partial\Omega \setminus \Gamma$ en une fonction harmonique θ (que l'on corrige très peu) sur $\overline{\Omega}$ et on a des bornes uniformes en temps sur un voisinage de $\gamma(t)$. Si l'approximation est assez bonne on obtient la proposition 1 grâce au lemme de Gronwall.

Idées des preuves

- ▶ On obtient des estimations de la forme

$$\|\varphi^{\nabla\theta}(0, t, \gamma_0) - \varphi^{\nabla\psi}(0, t, \gamma_0)\|_k \leq \sim \|\nabla\theta - \nabla\psi\|_{C^0, C^k(V(\gamma(t)))} \exp(\|\nabla\psi\|_{L^\infty, W^{k+1, \infty}(V(\gamma(t)))})$$

et

$$\|\nabla\theta(t, \cdot)\|_{C^k(\text{int}(\varphi^{\nabla\theta}(0, t, \gamma_0)))} \leq \|\nabla\psi(t, \cdot)\|_{C^k(\text{int}(\varphi^X(0, t, \gamma_0)))} + 1$$

Idées des preuves

- ▶ Lorsque γ_0 est seulement C^∞ : Le complémentaire de $\text{Int}(\gamma_0)$ dans la sphère de Riemann est connexe et simplement connexe:
 $T : \mathbb{S}^2 \setminus \overline{\text{Int}(\gamma_0)} \rightarrow \mathbb{D}^2$ conforme et C^∞ jusqu'au bord: On prend $\gamma_0^\mu = T^{-1}(\mathbb{D}_{1-\mu}^2)$. On fait la construction précédente et grâce au fait que T est lisse jusqu'au bord (thm de Kellogs-Warschawski) on montre que les ψ^μ sont bornées uniformément en t et μ sur $\text{int}(\varphi^X(t, 0, \gamma^0))$.
- ▶ Enfin lorsque X et γ sont seulement C^∞ : On écrit $X = \nabla^\perp h$ (puisque X est à divergence nulle) et on approche h par un h^μ (uniformément en t) qui lui est analytique grâce au théorème de Whitney et on corrige la condition de bord $X^\mu \cdot n \neq 0$ mais petit sur $\partial\Omega$ par le gradient d'une fonction harmonique.

Idées des preuves

- ▶ **Théorème 4.** On commence par se ramener au cas où γ_0 et γ_1 ont une intersection transverse: Soit $P \in \gamma_0$ et $Q \in \text{Int}(\gamma_1)$ on choisit une courbe $t \rightarrow s(t)$ de Ω telle que $s(0) = P$ et $s(1) = Q$.
On choisit $h(t, x)$ tel que $\nabla^\perp h(t, x) = s'(t)$ le long de $s(t)$ et on étend h arbitrairement sur $[0, 1] \times \Omega$. $\nabla^\perp h$ est à divergence nulle et son flot envoie γ_0 sur une courbe qui coupe γ_1 que l'on renomme γ_0 . Par le théorème de transversalité de Thom on peut choisir $r \in \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma_0 + r$ coupe γ_1 transversalement et soit entièrement incluse dans Ω .
- ▶ A partir de là la preuve est très technique mais repose essentiellement sur le schéma suivant:

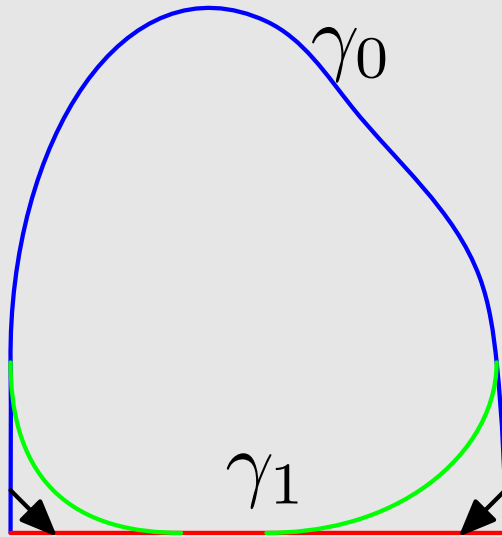


Figure 4

Idées des preuves

- ▶ Sur la partie verte à gauche on pose $b = 1$, et sur la partie verte à droite on prend $b = 0$ et b est monotone entre les parties vertes.

On résoud

$$-\Delta b = 0$$

dans le domaine bordé par les 3 couleurs avec b donné sur le bord, alors par le principe du maximum et le degré topologique on voit facilement que ∇b ne s'annule pas dans le domaine bordé par les 3 couleurs. Dans ce domaine on pose $v = \nabla c$ avec $v = \nabla^\perp b$ et près des coins on prend v envoyant par son flot les côtés verticaux sur les côtés horizontaux. Il faut ensuite faire des recollements et tenir compte de la nécessité d'avoir un champ à divergence nulle....

Idées des preuves

Si on combine le résultat de la proposition 1 et du théorème 4, on conclut au théorème 3.

Idées des preuves

- **Preuve du théorème 1:** On s'inspire de la méthode du retour introduite par Coron. Le $\nabla\theta$ construit dans le théorème 3 fait office de solution allant de 0 à 0.

On fixe ν petit.

Sur $[0, T - \nu]$ on ne contrôle pas.

Sur $[T - \nu, T]$ on fait passer très vite $\nabla\theta$ (avec la pression associée.) c'est à dire que l'on prend comme solution

$$\frac{1}{\nu} \nabla\theta\left(\frac{t - T + \nu}{\nu}, x\right)$$

et on espère obtenir le résultat en prenant ν très petit.

Idées des preuves

Plus précisément: On s'inspire du résultat de Coron sur Euler et également de ceux de Glass pour Euler. On montre que pour $\kappa \in \{0, 1\}$ il existe un point fixe à l'application suivante: (On note $\omega_0 := \text{curl}u_0$).

$$\mathcal{T} : C^0([0, T], C^{l,\alpha}(\overline{\Omega}))$$

$$\mathcal{T}(\omega) = \pi\omega_0(\varphi^{\pi(y)}(t, 0, x))$$

$$\text{curl}y = \omega \text{ sur } [0, T] \times \Omega$$

$$\text{div}(y) = 0 \text{ sur } [0, T] \times \Omega$$

$$y.n = \rho(t/\mu)u_0.n + \frac{\kappa}{\nu}\nabla\theta\left(\frac{t-T+\nu}{\nu}, x\right).n \text{ sur } [0, T] \times \partial\Omega$$

$$\int_{\Gamma_i} y(0, x).\tau(x)dx = \int_{\Gamma_i} u_0(x).\tau(x)dx$$

$$\int_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + (y.\nabla)y\right).\tau(x)dx = 0.$$

π est un opérateur d'extension de $C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})$ dans $C^{l,\alpha}(B(0, R))$ et de $LL(\Omega)$ dans $LL(B(0, R))$ où R est grand. ρ vaut 0 loin de 0.

Idées des preuves

- ▶ $LL(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions Log-lipschitz. Le point fixe donne des conditions de bord pour lesquelles on a unicité de la solution du système d'Euler.

Idées des preuves

- **Cas du théorème 2:** La situation est plus compliquée et le point fixe se fait dans un convexe fermé de $C^0(0, T \times \bar{\Omega})$ mais cette fois-ci plus en vorticité mais en vitesse:

$$\mathcal{S}(y) = z$$

$$\text{curl} z = \omega$$

$$\omega = (\chi \omega_0) \circ \varphi^{\pi(y)}(0, t, x)$$

$$\text{div} z = 0$$

$$z \cdot n = \rho(t/\mu) u_0 \cdot n + \frac{\kappa}{\nu} \nabla \theta \left(\frac{t - T + \nu}{\nu}, x \right) \cdot n(x)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i} z \cdot \tau dx = 0$$

(χ tronque les fonctions à 0 hors de Ω). La dernière relation vient de ce qu'on cherche à avoir $\omega = 0$ près du bord.

On commence par montrer qu'il y a un point fixe \bar{u} pour $\kappa = 0$ et u^ν pour $\kappa = 1$.

Idées des preuves

- ▶ On montre ensuite que pour $\kappa = 0$ ou 1 , $\varphi^{\bar{u}, u^v}(0, t, \gamma_0)$ reste dans Ω (en fait à une distance $d > 0$ du bord. Ceci est fait grâce au choix du convexe dans lequel on fait le point fixe pour \bar{u} pour t petit puis pour t grand on utilise les résultats de Yudovich, Wolibner,

Pour u^v on utilise Gronwall.

On utilise cette propriété pour prouver l'unicité.

Idées des preuves

Pour montrer que le point fixe construit permet de démontrer le résultat on utilise le mouvement du contour. Dans le cas de l'espace entier la dynamique s'écrit:

$$\operatorname{curl} V_\gamma = \chi_{\operatorname{int}(\gamma)}, \operatorname{div}(V_\gamma) = 0, V_\gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|x - \gamma(\sigma)| \tau(\sigma) d\sigma.$$

Dans notre cas les courbes $\bar{\gamma}(t) = \varphi^{\bar{u}}(0, t, \gamma_0)$ et $\gamma^\nu(t) = \varphi^{u^\nu}(0, T, \gamma_0)$ ont une dynamique qui fait intervenir $V_{\bar{\gamma}, \gamma^\nu}$. avec des termes correctifs dont la régularité par rapport à γ dépend du fait que l'on est loin de $\partial\Omega$ et par ailleurs on sait que

$$\gamma \mapsto V_\gamma$$

est lipschitz sur

$$\{\gamma \in C^{k,\alpha}, \inf_{\theta_1 \neq \theta_2} \frac{|\gamma(\theta_1) - \gamma(\theta_2)|}{|\theta_1 - \theta_2|} \geq 1/M, \|\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}\|_\infty \leq M\}.$$

Grâce à cette propriété on montre qu'on peut utiliser le lemme de Gronwall pour estimer le mouvement de γ

Vers la simulation

- ▶ L'idée sous jacente à la proposition 1 est la suivante: Pour prescrire le mouvement d'une courbe il suffit de prescrire la vitesse normale.
- ▶ **Proposition** Si γ est une courbe de Jordan incluse dans Ω , alors l'application

$$\Psi : H_m^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_m^{-1/2}(\gamma)$$

$$\Psi(h) = \frac{\partial v}{\partial \nu|_\gamma}$$

$$\Delta v = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \begin{cases} h \text{ sur } \Gamma \\ 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} v dx = 0$$

a une image dense.

Vers la simulation

- ▶ Plusieurs preuves sont possibles: En utilisant la variable complexe, à la Calderon (avec des fonctions $u_\zeta(x) := e^{\zeta \cdot x}$, $\zeta \in \mathbb{C}^2$), ou en montrant que l'adjoint vérifie la propriété de continuation unique. Cette dernière méthode marche dans le cas où Ω est dans \mathbb{R}^N , simplement connexe (et connexe). En fait dans le cas bidimensionnel on a densité dans tout les C^k (la preuve par variable complexe le donne)
- ▶ Il n'y a pas de formule véritablement explicite pour l'adjoint, néanmoins on peut utiliser la continuation unique: Si on prend $f \in H_m^{-1/2}(\gamma)$ le h de norme minimale tel que $\|\Psi(h) - f\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \leq \varepsilon$ est donné par un problème de minimisation sur l'adjoint

$$\min_{g \in H_m^{1/2}(\gamma)} \frac{1}{4} \|\Psi^* g\|^2 + \varepsilon \|g\| - \langle f/g \rangle .$$

Ce que l'on peut tenter d'utiliser pour construire une méthode numérique.

Vers la simulation

- ▶ Pour l'instant ce qui marche le mieux c'est de faire bouger le maillage selon l'axe vertical: résultat sur 1 pas de temps (0.1)

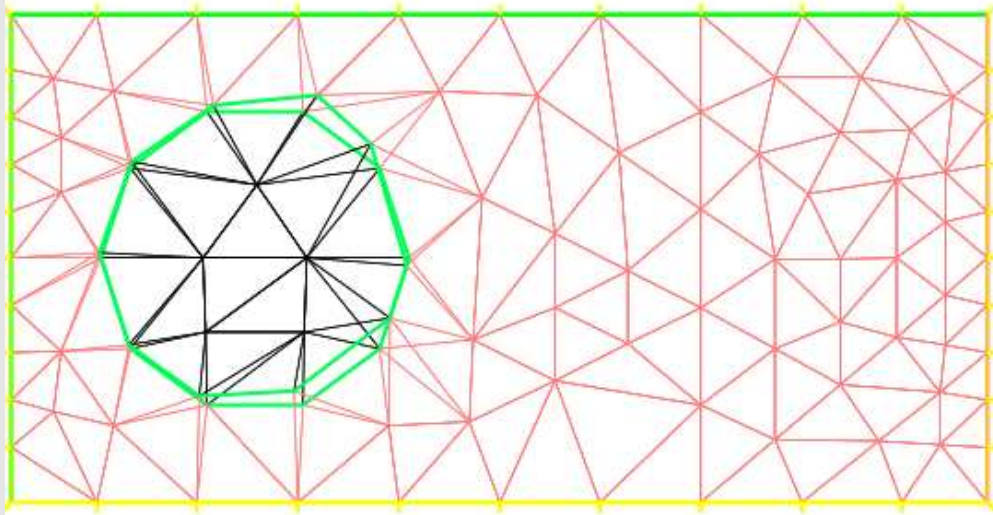


Figure 5

Vers la simulation

- ▶ Pour l'instant ce qui marche le mieux c'est de faire bouger le maillage selon l'axe horizontal: résultat sur 1 pas de temps (0.1)

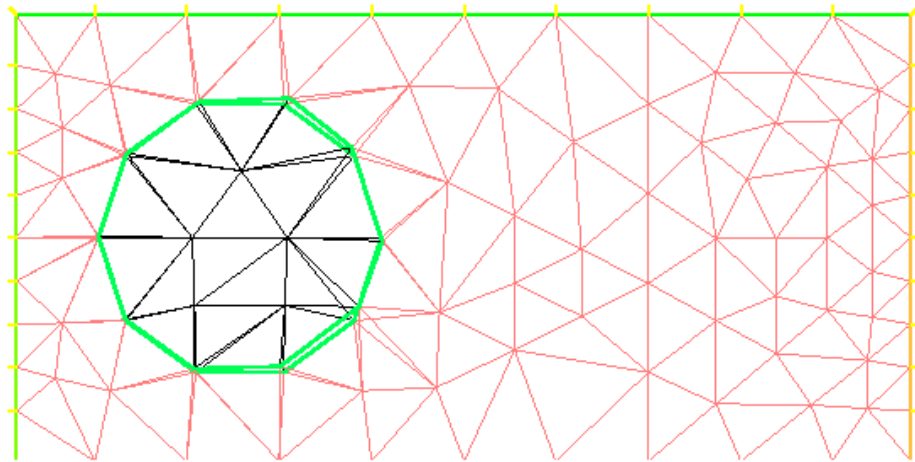


Figure 6