Contrôle de l'équation de Schrödinger non linéaire sur un intervalle borné

Camille LAURENT

Février 2009
Groupe de Travail Contrôle, Laboratoire Jacques-Louis Lions

Le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\partial_t u + \partial_x^2 u & = & \lambda |u|^2 u + g 1_\omega \quad \text{sur} \quad [0, T] \times I \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right.$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, I intervalle borné de $\mathbb{R}$ avec conditions au bord périodiques, de Dirichlet ou Neumann.

Bibliographie

Ondes non linéaire :

E. Zuazua, 1990 : point fixe

B. Dehman, G. Lebeau et E. Zuazua, 2003 : global en grand temps

B. Dehman and G. Lebeau, 2007 : premières harmoniques petites

Schrödinger non linéaire :

B. Dehman, P. Gérard, et G. Lebeau, 2006 : global en grand temps, H^1 défocalisant, dim 2 avec contrôle géométrique + prolongement unique

L. Rosier et B.Y. Zhang, 2007 (indépendemment) : local, L^2, dim 1

Autre références :

L. Baudouin et J.P. Puel ; A. Mercado, A. Osses et L. Rosier (Carleman)

L. Miller ; K. Ramdani, T. Takahashi, G. Tenenbaum et M. Tucsnak (méthodes spectrales)

K. Beauchard, J. M. Coron (contrôle bilinéaire)...

Théorème

Pour tout ouvert non vide $\omega \subset \mathbb{T}^1$ *et* $R_0 > 0$*, il existe* $T > 0$ *et* $C > 0$ *tels que pour tout* u_0 *et* u_1 *dans* $L^2(\mathbb{T}^1)$ *vérifiant*

$$\|u_0\|_{L^2} \leq R_0 \quad \text{et} \quad \|u_1\|_{L^2} \leq R_0$$

il existe un contrôle $g \in C([0,T], L^2)$ *supporté dans* $[0,T] \times \omega$*, tel que l'unique solution* u *dans* $X_T^{0,b}$ *du problème de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\partial_t u + \partial_x^2 u & = & \lambda |u|^2 u + g \quad \text{sur} \quad [0,T] \times \mathbb{T}^1 \\ u(0) & = & u_0 \in L^2(\mathbb{T}^1) \end{array} \right.$$

satisfait $u(T) = u_1$.
De plus, si u_0 *et* $u_1 \in H^s$*, avec* $s \geq 0$*, on peut imposer* $g \in C([0,T], H^s)$.

Théorème de stabilisation

Théorème

Si $a \in L^\infty(\mathbb{T}^1)$ *et* $a(x)^2 > \eta > 0$ *sur un ouvert non vide. Alors, pour tout* $R_0 > 0$, *il existe* $C > 0$ *et* $\gamma > 0$ *tels que l'on ait*

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq Ce^{-\gamma t}\|u_0\|_{L^2} \quad t > 0$$

pour toute solution u du système

$$\left\{\begin{array}{rcll} i\partial_t u + \partial_x^2 u + ia^2 u & = & \lambda|u|^2 u & \text{sur} \quad [0,T]\times\mathbb{T}^1 \\ u(0) & = & u_0 \in L^2(\mathbb{T}^1). & \end{array}\right.$$

avec donnée initiale u_0 *vérifiant* $\|u_0\|_{L^2} \leq R_0$.

Definition des espaces de Bourgain

L'espace de Bourgain $X^{s,b}$ est équipé de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{X^{s,b}} &= \sum_k \int_{\mathbb{R}} \langle k\rangle^{2s} \left\langle \tau + k^2 \right\rangle^{2b} \left|\widehat{\widehat{u}}(\tau,k)\right|^2 d\tau \\ " = " & \left\| \langle D\rangle^s \langle i\partial_t + \Delta\rangle^b u \right\|^2_{L^2} \\ &= \left\| u^{\#} \right\|^2_{H^b(\mathbb{R},H^s(\mathbb{T}^1))} \end{aligned}$$

avec $\langle . \rangle = \sqrt{1+|.|^2}$, $u = u(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^1$, et $u^{\#}(t) = e^{-it\partial_x^2} u(t)$.

$$\|u\|^2_{X^{s,b}_T} = \inf \left\{ \|\widetilde{u}\|^2_{X^{s,b}} \, | u = \widetilde{u} \text{ sur } [0,T] \right\}$$

Théorème

Soit ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{T}^1$ *et* $T > 0$*. Alors, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que pour tout* $u_0 \in L^2$ *et* $\|u_0\|_{L^2} < \varepsilon$*, il existe* $g \in C([0,T], L^2)$ *supporté dans* $]0, T[\times\omega$ *tel que l' unique solution* u *dans* $X_T^{0,b}$ *de*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\partial_t u + \partial_x^2 u &=& \lambda |u|^2 u + g \\ u(x,0) &=& u_0(x) \end{array} \right.$$

satisfait $u(T) = 0$*.*
De plus, si $u_0 \in H^s$*, avec* $s \geq 0$*, eventuellement avec une grande norme* H^s*, on peut imposer* $g \in C([0,T], H^s)$*.*

Lemme

Soit S l'opérateur HUM défini par

$$S\Phi_0 = i\int_0^T e^{-it\partial_x^2} a^2 e^{it\partial_x^2}\Phi_0 \, dt.$$

Alors, S est un isomorphisme de H^s pour tout $s \geq 0$. De plus, on a une inégalité

$$\left\| S^{-1}\Psi_0 \right\|_{H^s} \leq C \left\| \Psi_0 \right\|_{H^s} + C_s \left\| \Psi_0 \right\|_{H^{s-1}}.$$

Inégalités "douces"

Lemme

Pour tout $s \geq 0$, $b \geq 3/8$, on a

$$\left\| |u|^2 u \right\|_{X^{s,-b}} \leq C_s \left\| u \right\|^2_{X^{0,b}} \left\| u \right\|_{X^{s,b}}$$

Inégalités "douces"

Lemme

Pour tout $s \geq 0$, $b \geq 3/8$, *on a*

$$\begin{aligned} \left\| |u|^2 u \right\|_{X^{s,-b}} &\leq C_s \left\| u \right\|_{X^{0,b}}^2 \left\| u \right\|_{X^{s,b}} \\ \left\| |u|^2 u \right\|_{X^{s,-b}} &\leq C \left\| u \right\|_{X^{0,b}}^2 \left\| u \right\|_{X^{s,b}} \\ &\quad + C_s \left\| u \right\|_{X^{s-1,b}} \left\| u \right\|_{X^{1,b}} \left\| u \right\|_{X^{0,b}} \end{aligned}$$

Proposition

Soit $a \in L^\infty(\mathbb{T}^1)$ à valeurs réelles avec $a^2(x) > \eta > 0$ sur un ouvert non vide ω de $\mathbb{T}^1$.
Pour tout $T > 0$ et $R_0 > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$\|u(0)\|_{L^2}^2 \leq C \int_0^T \|au\|_{L^2}^2 \, dt$$

pour tout solution $u \in X_T^{0,b}$ de l'équation amortie

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\partial_t u + \partial_x^2 u + ia^2 u & = & \lambda |u|^2 u \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{T}^1 \\ u(0) & = & u_0 \in L^2 \end{array} \right.$$

et $\|u_0\|_{L^2} \leq R_0$.

Propagation de la compacité

Théorème

Soit u_n une suite de solutions de

$$i\partial_t u_n + \partial_x^2 u_n = f_n$$

telle que pour un $0 \leq b \leq 1$, on ait

$$\|u_n\|_{X_T^{0,b}} \leq C, \quad \|u_n\|_{X_T^{-1+b,-b}} \longrightarrow 0 \quad et \quad \|f_n\|_{X_T^{-1+b,-b}} \longrightarrow 0$$

De plus, on suppose qu'il existe un ouvert non vide ω tel que $u_n \longrightarrow 0$ fortement dans $L^2([0,T],L^2(\omega))$.
Alors $u_n \longrightarrow 0$ fortement dans $L^2_{loc}([0,T],L^2(\mathbb{T}^1))$.

Propagation de la régularité

Théorème

Soit $T > 0$, $0 \leq b < 1$ et $u \in X_T^{r,b}$, $r \in \mathbb{R}$ solution de

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = f \in X_T^{r,-b}$$

De plus, on suppose qu'il existe un ouvert non vide ω tel que $u \in L^2_{loc}(]0,T[, H^{r+\rho}(\omega))$ pour un $\rho \leq \frac{1-b}{2}$.
Alors $u \in L^2_{loc}(]0,T[, H^{r+\rho}(\mathbb{T}^1))$.

Perspectives

- dimension 3, contrôle près d'une trajectoire
- adaptation de la méthode à KdV : collaboration avec Lionel Rosier et Bing-Yu Zhang