# Contrôlabilité de systèmes de réaction-diffusion par l'action partielle d'une force localisée

En collaboration avec F.Ammar Khodja, C.Dupaix de l'université de Franche-Comté et M. González-Burgos de l'université de Séville

A. Benabdallah

Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités
CNRS / Université de Provence

Groupe de travail "'Contrôle"'

Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$

$$\begin{cases} \partial_t y = (DR + A)y + Bv1_\omega \text{ dans } \Omega_T = \Omega \times (0, T), \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T), \quad y(\cdot, 0) = y_0(\cdot) \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où

$$D = P^{-1}JP, \text{ où } P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \text{ det } P \neq 0,$$

avec $J = \mathrm{diag}\,(d_i)_{n\times n}$ avec $d_1, d_2, ..., d_n > 0$

$$R = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \left(r_{ij}(x)\partial_j\right) + c(x)$$

avec

$$\sum_{i,j=1}^{d} r_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \text{a.e. dans } \Omega, \tag{1.1}$$

$$r_{i,j} = r_{j,i}, \quad \text{et } a_0 > 0$$

Sous quelles conditions sur $D$, $A$, $B$ a-t-on contrôlabilité aux trajectoires? On s'attend à :

- Une condition algébrique: Extension de la condition de Kalman,
- Une condition topologique.

- Quelle est "'l'extension"' de la condition de Kalman?
- Est-elle suffisante pour assurer la propriété de contrôlabilité?

Sous quelles conditions sur $D$, $A$, $B$ a-t-on contrôlabilité aux trajectoires? On s'attend à :

- Une condition algébrique: Extension de la condition de Kalman,
- Une condition topologique.

- Quelle est "'l'extension"' de la condition de Kalman?
- Est-elle suffisante pour assurer la propriété de contrôlabilité?

$$Y_t = AY + Bu$$

$$H = \mathbb{R}^n, A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}), B = (b_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{R}), U = \mathbb{R}^m.$$

**Proposition**

***Kalman*** $(A, B)$ *est contrôlable au temps* $T$ *si et ssi*

$$rg[A\,|\,B] = rg[B, AB, ..., A^{n-1}B] = n.$$

$$Y_t = AY + Bu$$

$$H = \mathbb{R}^n, A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}), B = (b_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{R}), U = \mathbb{R}^m.$$

## Proposition

***Kalman*** $(A, B)$ *est contrôlable au temps* $T$ *si et ssi*

$$rg[A\,|\,B] = rg[B, AB, ..., A^{n-1}B] = n.$$

**Exemple** $n = 3, m = 1$ et $b_1 = b_2 = 0$.

$$[A|B] = \begin{pmatrix} 0 & a_{13}b_3 & (a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33})\, b_3 \\ 0 & a_{23}b_3 & (a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33})\, b_3 \\ b_3 & a_{33}b_3 & (a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}^2)\, b_3 \end{pmatrix},$$

$$\det[A|B] = b_3^3\left(a_{13}^2\, a_{21} + a_{13}\, a_{22}a_{23} - a_{23}a_{11}a_{13} - a_{23}^2 a_{12}\right).$$

La condition de Kalman est satisfaite si et ssi

$$b_3 \neq 0,$$

et

$$\left(a_{13}^2\, a_{21} + a_{13}\, a_{22}a_{23} - a_{23}a_{11}a_{13} - a_{23}^2 a_{12}\right) \neq 0.$$

**Exemple** $n = 3, m = 1$ et $b_1 = b_2 = 0$.

$$[A|B] = \begin{pmatrix} 0 & a_{13}b_3 & (a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33})\, b_3 \\ 0 & a_{23}b_3 & (a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33})\, b_3 \\ b_3 & a_{33}b_3 & (a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}^2)\, b_3 \end{pmatrix},$$

$$\det[A|B] = b_3^3 \left(a_{13}^2\, a_{21} + a_{13}\, a_{22}a_{23} - a_{23}a_{11}a_{13} - a_{23}^2 a_{12}\right).$$

La condition de Kalman est satisfaite si et ssi

$$b_3 \neq 0,$$

et

$$\left(a_{13}^2\, a_{21} + a_{13}\, a_{22}a_{23} - a_{23}a_{11}a_{13} - a_{23}^2 a_{12}\right) \neq 0.$$

# Contrôlabilité approchée =Contrôlabilité à zéro?

$$\begin{cases} y_{1t} = -Ay_1 + f(A)y_2 \\ y_{2t} = -Ay_2 + f(A)y_1 + u \\ y_1(0) = y_{01}, \; y_2(0) = y_{02} \end{cases}$$

$A$ est un opérateur non borné, positif, auto-adjoint sur un espace de Hilbert $H$, à spectre discret $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$.
$f$ est une fonction réelle définie sur $\sigma(A)$, avec

$$f(A) := \sum_k f(\lambda_k) \langle ., \phi_k \rangle \phi_k.$$

On suppose $f : \sigma(A) \to \mathbb{R}$ vérifie

$$0 < |f(s)| < s, \forall s, \text{et } f(s) = o(s) \text{ quand } s \to \infty,$$

(l'opérateur $f(A)$ est relativement compact par rapport à $A$).

**Théorème**

Le système est contrôlable aux trajectoires au temps $T$ si et ssi la fonction $s^{-3}f^2(s)e^{2Ts}$ est minorée par une constante positive quand $s \to \infty$.

Plus particulièrement

2/-Pour $f(s) = e^{-s}$ le système est nul-contrôlable si et ssi $T > 1$.

3/-Si la décroissance de $f(s)$ est "super exponentielle", le système n'est pas contrôlable (en aucun temps).

## Remarque

- D'un point de vue "heuristique", ce résulat donne des indications sur "l'ordre" du couplage pour obtenir la contrôlabilité.

  Par exemple, si l'opérateur de couplage est "trop compact" (la suite de ses valeurs propres tend très vite vers 0), alors la nulle-contrôlabilité est en général fausse.
- Même si la condition algébrique de Kalman condition est satisfaite pour chaque fréquence, le système peut ne pas être contrôlable.

# Contôle interne, contrôle fontière?

On note $\gamma$ une portion de $\partial\Omega$ et $\Gamma = \partial\Omega\backslash\gamma$

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + w, \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ w_t = d\Delta w, \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ w(x,t) = u(x,t), \text{ sur } \gamma \times (0,T) \\ w(t,x) = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0,T) \\ v(t,x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

**Résultat**

$n = 1$ et $\exists j \neq k$ tel que

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_k} = d$$

alors le système n'est pas contrôlable:

L. De Teresa , E. Fernandez-Cara et M. Gonzàles-Burgos, On change de contrôle

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + w, \text{ dans } \Omega \times (0,T) \\ w_t = d\Delta w + \chi_\omega u, \text{ dans } \Omega \times (0,T) \\ w(t,x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ v(t,x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

**Résultat**

Contrôlabilité aux trajectoires pour tout $d$.

# Contrôlabilité des systèmes de réaction-diffusion 2 $\times$ 2

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + au + bv, \text{ dans } Q_T \\ v_t = \Delta v \ + cu + dv + \chi_\omega \, g \text{ dans } Q_T \end{cases}$$

Posons

$$\left\{\begin{array}{rcll} \eta(x,t) & := & \dfrac{\beta_0(x)}{t(T-t)}, & \forall (x,t) \in \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ \rho(t) & := & \dfrac{1}{t(T-t)}, & \forall t \in (0,T). \end{array}\right.$$

où $\beta_0 \in C^2(\overline{\Omega})$. $\tau \in \mathbb{R}$

$$I(\tau,\varphi) = \iint_{\Omega_T} (s\rho)^{\tau-1} e^{-2s\eta} \left( |\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2 + (s\rho)^2 |\nabla\varphi|^2 + (s\rho)^4 |\varphi|^2 \right).$$

**Théorème**
Supposons qu'il existe une constante $b_0 > 0$ et un domaine $\omega_b$ tel que

$$\begin{aligned} \omega_b &\Subset \omega \\ |b| &\geq b_0 \text{ in } \omega_b \times (0, T_0) \end{aligned}$$

pour un $T_0 > 0$, il existe une constante $C = C_{r,T}$ telle que:

$$I(0,\varphi) + I(0,w) \leq C \int_0^T \int_\omega e^{-2\eta} w^2 \, dx \, dt.$$

pour tout $(\varphi, w)$ solution du problème adjoint.

- Ce résultat contient une propriété d'unicité: *Toute solution du système adjoint dont la seconde composante s'annule sur* $\omega \times (0, T)$*, est identiquement nulle.*
- Il est basé sur une *inégalité de Carleman locale*:

$$\int_0^T \int_{\omega'} \left(\varphi^2 + w^2\right) \; e^{-2\eta}\, dx\, dt \leq C \int_0^T \int_{\omega} e^{-2\eta} w^2\, dx\, dt.$$

pour tout $\omega'$ tel que $\omega' \Subset \omega_b \Subset \omega$.

- L. de Teresa, *Insensitizing controls for a semilinear heat equation*, Comm. PDE, 25, 2000.
- Ammar Khodja F., Benabdallah A., Dupaix C. et Kostin. I, *Controllability to the trajectories of phase-field models by one control force*, SIAM J. Control Optim., 2003.
- F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, I. Kostine, :*Null controllability of some systems of parabolic type by one control force,*ESAIM Control Optim. Calc. Var, 2005.
- F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, *Null-controllability of some reaction-diffusion systems with one control force*, J. Math. Anal. Appl., 320, 2006.

- M.González-Burgos, R.Pérez-García, *Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force*, Asymptotic Analysis 46, 2006.
- S. Guerrero, Sergio *Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force.* SIAM J. Control Optim. 46 (2007), no. 2.
- M.González-Burgos, L. de Teresa, *Controllability results for cascade systems of m coupled parabolic PDEs by one control force*,
- H. Ramoul, *Carleman estimates for one-dimensional systems of m parabolic PDEs with $BV$ coefficients and applications*, 2009.

# Une CNS de contrôlabilité

Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$

$$\begin{cases} \partial_t y = (D\Delta + A)y + Bv1_\omega \text{ dans } \Omega_T = \Omega \times (0, T), \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T), \quad y(\cdot, 0) = y_0(\cdot) \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où

$$D = P^{-1}JP, \text{ où } P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \text{ det } P \neq 0,$$

avec $J = \operatorname{diag}(d_i)_{n\times n}$ avec $d_1, d_2, \ldots, d_n > 0$

$$A \in M_n(\mathbb{R}), \; B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

$$L := D\Delta + A$$

$$D(L) = D(\Delta)^n = \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^n$$

On définit l'opérateur de Kalman associé à $(L, B)$ :

$$\begin{cases} \mathcal{K} := [L \mid B] = \left[L^{n-1}B, L^{n-2}B, ..., LB, B\right] : D(\mathcal{K}) \subset L^2(\Omega)^{nm} \rightarrow L^2(\Omega)^n, \\ D(\mathcal{K}) := \{u \in L^2(\Omega)^{nm} : \mathcal{K}u \in L^2(\Omega)^n\}, \end{cases}$$

## Théorème

$$\begin{cases} \partial_t y = (D\Delta + A)y + Bv1_\omega \text{ dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \quad y(\cdot,0) = y_0(\cdot) \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

est contrôlable aux trajectoires ssi

$$Ker(\mathcal{K}^*) = \{0\}$$

ssi

$$\mathrm{rank}\,[(-\lambda_p D + A) \mid B] = n, \ \forall p$$

$(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ la suite des valeurs propres de $-\Delta$

$$L_p = -\lambda_p D + A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

$$p \Rightarrow : \mathcal{K}_p = [L_p \mid B] = \left[L_p^{n-1}B, ..., L_pB, B\right] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{nm}, \mathbb{R}^n).$$

**Proposition**

Le système est contrôlable, au moins à un espace de dimension finie près, dès que

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{K}_p^*) = \{0\}\,.$$

est vérifiée pour une fréqence $p$. ( conditon de Kalman algébrique).

## Exemple

$$A \equiv 0, \quad D = \operatorname{diag}(d_i)_{n\times n}$$

avec $d_i > 0, \forall 1 \leq i \leq n$, et

$$B = (b_1, ..., b_n)^* \in \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{rank}\left[(-\lambda_p D + A) \mid B\right] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} (-\lambda_p d_1)^{n-1}\, b_1 & (-\lambda_p d_1)^{n-2}\, b_1 & \cdots & b_1 \\ (-\lambda_p d_2)^{n-1}\, b_2 & (-\lambda_p d_2)^{n-2}\, b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\lambda_p d_n)^{n-1}\, b_n & (-\lambda_p d_n)^{n-2}\, b_n & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

Ce rang est égal à $n$ ssi

$$b_i \neq 0,\ \forall i, \text{ et les } d_i \text{ sont tous distincts.}$$

# Rappel de la situation en dimension finie

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, si $(A, B)$ est contrôlable alors :

$$Y' = AY + Bu \Leftrightarrow W' = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 \end{pmatrix} W + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$Y' = AY + Bu \Leftrightarrow \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} z + a_1 \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}} z + \ldots + a_n z = u$$

où

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

$$Y = \mathcal{K} W$$

On va chercher à démontrer l'inégalité d'observabilité pour le problème adjoint. Chaque composante $\varphi_\ell$ du système adjoint vérifie

$$\det\left(I_d\partial_t + D\Delta + A^*\right)\varphi_\ell = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_T, \quad \forall \ell : 1 \leq \ell \leq n.$$

C'est une équation scalaire d'ordre $n$ en temps.

# Une inégalité d'observabilité pour une équation d'ordre $n$ en temps

Idée de base : On transforme l'équation en un système en cascade et on utilise les résultats de L. De Teresa, M. González-Burgos pour démontrer :

**Théorème** Soit $n, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ et $s_0 \in \mathbb{R}$ donnés. Alors il existe deux fonctions positives $\alpha_0, \alpha_1 \in C^2(\overline{\Omega})$, deux constantes positives $C$ et $\sigma$ telles que

$$\sum_{i=0}^{k_1}\sum_{j=0}^{k_2} \mathcal{I}(s_0 - 4(i+j), \Delta^i \partial_t^j \phi) \leq C\tau^{s_0+r_0} \iint_{\omega_T} \rho^{s_0+r_0} e^{-2\tau\alpha} |\phi|^2 , \quad ,$$

pour tout $\phi \in C^\infty((0,T); \mathcal{D})$ solution de

$$\det\left(I_d \partial_t + D\Delta + A^*\right)\phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_T,$$

Rappelons que $\mathcal{D} = \cap_{p\geq 0} D(\Delta^p)$,

$$\mathcal{I}(s,\phi) = I(s+3(n-1),\phi) + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} I(s+3(n-p-1), P_{i_p}\ldots P_{i_1}\phi),$$

$$P_i \equiv \partial_t + d_i\Delta, \; 1 \leq i \leq n.$$

On applique ce théorème à chaque composante de $B^*\varphi$

$$w_\ell = (B^*\varphi)_\ell\,,\ \ 1 \leq \ell \leq m$$

où $\varphi$ est une solution du système adjoint.

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_{\Omega_T} e^{-2\tau\alpha} |\Delta^{(n-1)(2n-1)} \partial_t^j w_\ell|^2 \leq C\tau^{r_0+8n(n-1)} \int_{\omega_T} e^{-2\tau\alpha} \rho^{r_0+8n(n-1)} |B^*\varphi|^2.$$

C'est une inégalité d'observabilité *partielle*.
Il faut noter qu'on n'a pas utilisé l'hypothèse d'inversibilité de l'opérateur de Kalman

# L'opérateur de Kalman est inversible

On montre que si

$$\mathrm{Ker}\,(\mathcal{K}^*) = \{0\}\,,$$

alors on a

$$||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| \Delta^{(n-1)(2n-1)} \mathcal{K}^* \varphi(t) \right\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leq C \sum_{j=0}^{n-1} ||\Delta^{(n-1)(2n-1)} \partial_t^j B^* \varphi(t)||^2_{L^2}$$

D'où l'inégalité d'observabilité:

$$||\varphi(T)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_{\omega_T} |B^* \varphi|^2.$$

# Condition nécessaire

$\mathrm{Ker}(\mathcal{K}^*) \neq \{0\}$. Alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 \in \sigma(\mathcal{K}_{p_0})$. On peut alors appliquer le critère de Kalman en dimension finie au système différentiel:

$$\begin{cases} \frac{dy^{p_0}}{dt} = (-\lambda_{p_0} D + A)\, y^{p_0} + Bv \;\text{ dans }\; (0, T), \\ y^{p_0}(0) = y_0^{p_0} \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Il existe une solution non nulle du système adjoint $z_{p_0}(t) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie $B^* z_{p_0}(t) = 0, \forall t \in [0, T]$.
Si on choisit la condition finale du problème adjoint:

$$\varphi_0 = z_{p_0}(T)\phi_{p_0},$$

la solution correspondante est

$$\varphi(t, x) = z_{p_0}(t)\phi_p(x).$$

Elle est non nulle et vérifie $B^*\varphi(t) = 0, \forall t \in [0, T]$.

# Contrôlabilité approchée

- $n = 2$, $+$ des termes en gradient ou $n = 3$
- $\overline{\omega} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$

$$\Rightarrow$$

Conditions suffisantes de contrôlabilité approchée.

Benabdallah A., Cristofol M., Gaitan P. and Yamamoto M., Inverse problem for a parabolic system with two components by measurments of one component, accepté dans Applicable Analysis, Octobre 2008.

- E.Crépeau et C.Prieur, Approximate controllability of a reaction-diffusion system, Systems Control Letters, 2008.
- H. Leiva, Controllability of a system of parabolic equations with non-diagonal diffusion matrix, IMA J. Math. Control Inform. 22 (2005), no. 2, 187–199.
- O. Kavian et L. De Teresa: la zone de couplage et celle de contrôle ne se "‘rencontrent"’ pas ($n = 2$).

# Contrôle frontière

E, Fernandez-Cara, L. De Teresa et M. Gonzales-Burgos:

Contrôle fontière d'un système de 2 équations paraboliques couplées en dimension 1

$$\begin{cases} Y' = \Delta Y + AY, \text{ dans } (0,1) \times (0,T) \\ BY(0,t) = u(t), \\ Y(1,t) = 0, \\ Y(.,0) = Y_0 \end{cases} .$$

Alors que dans le cas d'un contrôle distribué, la condition de Kalman

$$\det[B, AB] = 2$$

est suffisante, ici il faut ajouter une condition liant les valeurs propres de $A$ à celle du Laplacien-dirichlet. Ceci est totalement différent du cas scalaire!!

Presque tout. En particulier

- Contrôlabilité de $n$ équations paraboliques par $n$ contrôles localisés.
- Contrôlabilité frontière: 2 équations en dimension d'espace $> 1$, 3 équations en dimension 1...