Données et mécanique des structures

H. Le Dret

Sorbonne Université

50 ans du LJLL @ Roscoff

L'ancien monde

Dans le temps, en mécanique des milieux continus, on avait :

- des lois de conservation de la physique,
  - la conservation de la masse,
  - la conservation de la quantité de mouvement,
  - la conservation de tout ce qui se conserve.
- des lois de comportement,
  - la loi de comportement de la coquille de l'huître,
  - la loi de comportement de la chair de l'huître.

Les lois de conservation sont universelles.
Les lois de comportement sont phénoménologiques et spécifiques à chaque matériau.

Le nouveau monde

Maintenant, on a :

- toujours les lois de conservation de la physique,
- et des données.

Alors, les données vont-elles remplacer les lois de comportement ?

C'est ce que promet la

« data-driven computational mechanics »,

a new computing paradigm

(acc. to Kirchdoerfer, T. & Ortiz, M.
Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 304 (2016) 81–101)

Premiers éléments de réponse

Ce n'est probablement pas exactement pour demain.

Mais l'idée est intéressante.

Prenons une loi de comportement classique au hasard : un matériau d'Ogden ($v_i = v_i(F)$) :

$$W(F) = \sum_{i=1}^{M} a_i(v_1^{\gamma_i} + v_2^{\gamma_i} + v_3^{\gamma_i}) + \sum_{j=1}^{N} b_j((v_1 v_2)^{\delta_j} + (v_2 v_3)^{\delta_j} + (v_1 v_3)^{\delta_j}) + \Gamma(v_1 v_2 v_3),$$

avec $a_i > 0$, $b_j > 0$, $\gamma_i \geq 1$, $\delta_j \geq 1$ et Γ convexe, $\Gamma(\delta) \to +\infty$ quand $\delta \to 0^+$ (par exemple $\Gamma(\delta) = c\delta^2 - d \ln \delta$, $c, d > 0$).

Premiers éléments de réponse

Ça fait quand même beaucoup de paramètres à ajuster à partir des données expérimentales...

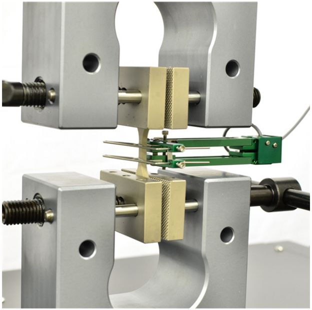
D'où l'idée du data-driven etc. :

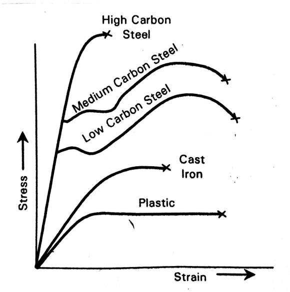
Court-circuiter la loi de comportement et utiliser directement ces fameuses données, tout en satisfaisant les lois de conservation.

On fait l'impasse sur les démarches visant à obtenir des lois de comportement à partir de la structure microscopique.

Mais ces données, c'est quoi ?

En particulier dans ce contexte-là.





Données = couples forces $\leftrightarrow$ déformation.

L'exemple de Kirchdoerfer & Ortiz 1

Est un treillis de barres (les dessins qui suivent sont tous piqués chez K. & O.) :

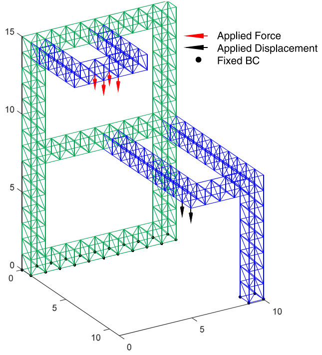


Fig. 3. Model problem geometry with boundary conditions.

L'exemple de Kirchdoerfer & Ortiz 2

Tout est linéarisé, sauf la loi de comportement de chaque barre :

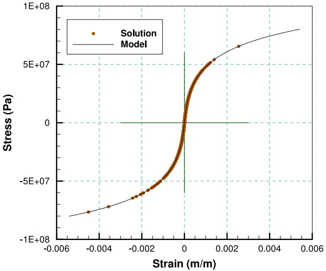


Fig. 4. Material model with reference solution values superimposed.

Ici, c'est juste une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\varepsilon \mapsto \sigma$.

L'exemple de Kirchdoerfer & Ortiz 3

L'approche ancienne consiste à

- Écrire la loi de conservation, ici l'équilibre de chaque nœud, i.e., la somme des forces, soit extérieures appliquées, soit provenant de la contrainte dans chacune des barres aboutissant à ce nœud, est nulle.
- Remplacer chaque contrainte par sa valeur donnée par la loi de comportement en fonction de la déformation locale.
- Exprimer les conditions de Dirichlet en termes des déformations.
- Résoudre le gros système non linéaire obtenu d'une façon ou d'une autre.

L'exemple de Kirchdoerfer & Ortiz 4

Le principe data-driven est différent.

- On dispose d'un jeu de données E d'états locaux pour les barres, un nombre fini de couples (ε, σ).

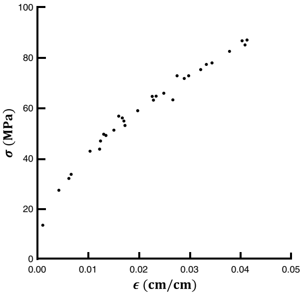
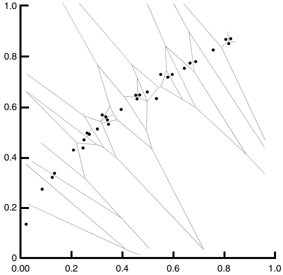


Fig. 1. Typical material data set for truss bar.

- La solution est un ensemble d'états locaux $(\varepsilon_e, \sigma_e)$ pour chaque barre $e = 1, \ldots, m$, compatible avec la loi de conservation et les conditions aux limites, et le plus proche possible du jeu de données E en un certain sens.

L'exemple de Kirchdoerfer & Ortiz 5

La loi de comportement est donc de fait remplacée par le jeu de données. Plus précisément, on pose
$F((\varepsilon,\sigma)) = \min_{(\varepsilon',\sigma')\in E}\big((\varepsilon-\varepsilon')^2+(\sigma-\sigma')^2\big)$,



Et on minimise $\mathcal{F}(z)=\sum_{e=1}^{m} F((\varepsilon_e,\sigma_e))$ sous contraintes de compatibilité, où $z=((\varepsilon_e,\sigma_e))_{e=1,\dots,m}$ est un état global du treillis.

L'exemple de Kirchdoerfer & Ortiz 6

Il y a n nœuds, donc $3n$ degrés de liberté de déplacements u_i et $3n$ forces extérieures f_i (scalaires).

Compatibilité cinématique : $\varepsilon_e = \sum_{i=1}^{3n} B_{ei} u_i$. B_{ei} = matrice traduisant connectivité du treillis et directions des barres. Certains des u_i sont donnés.

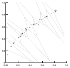
Équilibre : $\sum_{e=1}^{m} B_{ei} \sigma_e = f_i$, pour les nœuds qui travaillent.

Ce problème admet une solution.

Si l'on se donne une famille $((\varepsilon^*, \sigma^*)) \in E^e$, alors on a un problème de minimisation quadratique sous contraintes affines, cad un gros système linéaire en les inconnues u_i et σ_e $\rightarrow$ état global cinématiquement admissible et en équilibre le plus proche au sens global de cette famille.

L'exemple de Kirchdoerfer & Ortiz 7

L'algorithme :

1. On tire au hasard un élément $((\varepsilon^{*0}, \sigma^{*0})) \in E^e$ et on résout le gros système linéaire $\to ((\varepsilon^1, \sigma^1)) \in (\mathbb{R}^2)^e$, cinématiquement admissible et en équilibre, le plus proche au sens global, mais pas a priori au sens local.
2. Pour chaque e, on prend $(\varepsilon_e^{*1}, \sigma_e^{*1}) \in E$ en piochant dans la cellule de Voronoi où se trouve $(\varepsilon_e^1, \sigma_e^1)$, 
3. $\to ((\varepsilon^2, \sigma^2)) \in (\mathbb{R}^2)^e$, etc., etc.

Alors, l'ancien monde est-il K. & O. ?

Ils disent que

- Ça marche. (?)
- C'est efficace.
- C'est robuste.
- Il y a convergence vers la vraie solution quand
  - le jeu de données se rapproche de la vraie loi de comportement et
  - ne laisse pas trop de trous...
- Autre exemple avec de l'élasticité linéaire 3d.

Travail de Conti, Müller & Ortiz

Conti, S., Müller, S. & Ortiz, M., Data-driven problems in elasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 229 (2018) 79–123. https://doi.org/10.1007/s00205-017-1214-0

- Introduire un cadre abstrait pour cela,
- avec des « data- » partout même s'il n'y en a pas tant que ça, en fait.
- Plutôt dans la continuité des idées de Tartar sur edp vs. minimisation d'énergie :
- D'un côté les lois de conservation linéaires, de l'autre les lois de comportement (non) linéaires, avec un couple de variables conjuguées.
- On cherche à se placer à l'intersection des deux.

Ze « data-driven » problème

Soit $Z = E \times S$ produit de deux espaces de Banach, normé = espace des phases. Une loi de comportement $F\colon E \to S$ et deux parties de Z :

- Un ensemble de « données matérielles »

$$\mathcal{D} = \{(\varepsilon, \sigma) \in Z; \sigma = F(\varepsilon)\},$$

- Un ensemble de « lois »

$$\mathcal{E} = \{z \in Z; \text{compatibilité} + \text{équilibre}\},$$

- Data-driven problème : trouver $z_* \in \mathcal{E}$,

$$d(z_*, \mathcal{D}) = \inf_{z \in \mathcal{E}} d(z, \mathcal{D}).$$

Ex. de l'élasticité linéaire : $Z = L^2(\Omega; \mathrm{Sym}) \times L^2(\Omega; \mathrm{Sym})$, $F(\varepsilon) = \mathbb{C}\varepsilon$ (d'où $\mathcal{D}$) et

$$\mathcal{E} = \{z \in Z; \exists u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) + \text{C.L.},$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \text{ et } -\operatorname{div} \sigma = f\}$$

Pour quelques convergences de plus

Reformulation sur $Z \times Z$: $\operatorname{argmin}(I_{\mathcal{D}\times\mathcal{E}}(y,z) + \|y-z\|)$.

Data-convergence $(y_n, z_n) \overset{\Delta}{\to} (y,z)$ ssi $y_n \rightharpoonup y$, $z_n \rightharpoonup z$ et $y_n - z_n \to y - z$.

D'où $\Gamma(\Delta)$-, $M(\Delta)$-, $K(\Delta)$-convergences...

... et Δ-relaxation : $\bar{\mathcal{D}} \times \mathcal{E} = K(\Delta)\text{-}\lim(\mathcal{D}\times\mathcal{E})$.

En clair, $(\varepsilon,\sigma) \in \bar{\mathcal{D}}$ s'il existe $(\eta,\tau) \in \mathcal{E}$ et $\big((\varepsilon_n,\sigma_n),(\eta_n,\tau_n)\big) \in \mathcal{D}\times\mathcal{E}$, $(y_n,z_n) \overset{\Delta}{\to} (y,z)$.

Exemple à deux puits de potentiel