50 ans d'homogénéisation au LJLL

Antoine Gloria, LJLL
Conférence d'ouverture des 50 ans du LJLL à Roscoff

Plan

L'homogénéisation...

- comme outil d'analyse des EDP (années 1970 et 1980)
- comme outil de modélisation (années 1980 et 1990)
- comme outil de simulation (années 1990 et 2000)
- à la croisée des EDP et des probabilités

L'homogénéisation comme outil d'analyse des EDP

Les années 1970 et 1980

L'analyse des EDP: $F(u, Du) = 0$

Questions classiques :

- Existence de solutions
- Unicité de la solution
- Régularité de la solution (ou "robustesse" de la régularité : données régulières $\Longrightarrow$ solution régulière)

Question née de l'**homogénéisation** des EDP :

- **Propagation des oscillations dans les EDP** (ou "robustesse" vis à vis des oscillations)

Tout est bien entendu relié :

- Existence : compacité (topologies faibles $\rightarrow$ potentielles oscillations)
- Unicité versus régularité
- Régularité / Oscillations : petits/grands modes de Fourier

Du contrôle à l'homogénéisation (François, 1971)

Question de **JLL** dans son livre sur le **contrôle distribué** : comment se comporte la suite u_ε, solution de $-\operatorname{div} a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = f$, si $a_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{a}$?

En particulier, a-t-on $u_\varepsilon \to \tilde{u}$ avec $-\operatorname{div} \tilde{a} \nabla \tilde{u} = f$?

Réponse de **François : NON** en dimension 1.

Prenons $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$ où $a : \mathbb{R}^d \to [1,2]$ est 1-périodique (donc a_ε est ε-périodique), soit $F \in C^1(0,1)$ et soit u_ε la solution de

$$\frac{d}{dx}(a_\varepsilon \frac{d}{dx} u_\varepsilon)(x) = F'(x) \text{ sur } (0,1), \; u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0.$$

Solution explicite :

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} y dy - \int_0^x \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} dy \left(\int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} dy \right)^{-1} \int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} y dy.$$

Observation : $y \mapsto \frac{1}{a_\varepsilon(y)}$ converge faiblement vers $\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle := \int_0^1 \frac{1}{a}$.

Du contrôle à l'homogénéisation (François, 1971)

Passage à la limite

$$\begin{array}{ccccccccc} u_\varepsilon(x) & = & \int_0^x \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} F(y)dy & - \int_0^x \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} dy & \left(\int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} dy \right)^{-1} & \int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} F(y)dy \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bar{u}(x) & = & \int_0^x \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle F(y)dy & -x \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1} & \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \int_0^1 F(y)dy \end{array}$$

On a donc $\bar{u}(x) = \int_0^x \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle F(y)dy - x \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \int_0^1 F(y)dy$, qui est solution de

$$\frac{d}{dx}(\bar{a}\frac{d}{dx}\bar{u})(x) = F'(x) \text{ sur } (0,1), \ \bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0, \quad \bar{a} = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1}.$$

Or $\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1} \neq \langle a \rangle = \tilde{a}$ (cf. $\tilde{a}$ est la limite faible de a_ε).

Peu surprenant aujourd'hui : $a_\varepsilon u_\varepsilon'$ est un **produit de suites convergeant faiblement...** (cf. $u_n(x) = \sin nx$, $u_n \rightharpoonup 0$ et $u_n^2 \rightharpoonup \frac{1}{2}$)

D'où vient la terminologie "homogénéisation" ?

Pas de la mécanique : "matériau effectif ou équivalent".

Vient du CEA et de l'étude de réacteurs nucléaires (homogénéisation des équations de transport) par Pierre Benoist dans sa thèse en 1964 !

Théorie du coefficient de diffusion
des neutrons dans un réseau
comportant des cavités

Pour en savoir plus : article historique (SMF, 2018) de Claude Bardos et Norbert Mauser sur les équations de transport et cinétiques

Ces foutues convergences faibles (1973)

La dimension 1 est explicite, que se passe-t-il en dimension supérieure ?

$$-\operatorname{div} a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = f, u_\varepsilon \in H^1_0(D)$$

Toujours ce problème de produits de suites qui convergent seulement faiblement...

La remarque de **François** (Murat) : "il y a quelque chose avec le gradient et la divergence".

La réponse de **Luc** (Tartar) : un énoncé venu de nulle part et sa démonstration en Fourier au tableau

$\rightarrow$ **Naissance de la compacité par compensation**

(Pour les jeunes : poser la bonne question est parfois tout aussi important qu'apporter la bonne réponse)

La compacité par compensation (1973)

Théorème (Murat-Tartar)

Soient u_n et v_n deux suites de $L^2(\mathbb{R}^d)^d$ qui convergent faiblement vers u et v et telles que $\{\operatorname{div} u_n\}_n$ et $\{\operatorname{rot} v_n\}$ sont bornées dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)^{d^2}$. Alors $u_n v_n \to uv$ au sens des distributions.

Idée de démonstration.
En résumé : Rellich directionnel en Fourier (les directions où u_n oscille, v_n n'oscille pas par "Rellich" dû à $\operatorname{rot} v_n$ borné, et réciproquement).
Clé : relation en Fourier pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\xi_k \langle \hat{u}_n, \hat{v}_n \rangle (\xi) &= \xi_k \sum_{i=1}^{d} (\hat{u}_n)_i (\overline{\hat{v}_n})_i \\ &= (\overline{\hat{v}_n})_k \underbrace{\sum_{i=1}^{d} \xi_i (\hat{u}_n)_i}_{\text{div}} + \sum_{i=1}^{d} \underbrace{(\xi_k (\overline{\hat{v}_n})_i - \xi_i (\overline{\hat{v}_n})_k)}_{\text{rot}} (\hat{u}_n)_i .\end{aligned}$$

Puis argument type convergence fort-faible et Plancherel.

La compacité par compensation et l'analyse des EDP

Le résultat de François et Luc est resté dans le tiroir quelques années (connu de Lions, Nirenberg...) : à quoi cela peut-il servir ?

Vers la fin des années 70, on comprend que cela sert à **passer à la limite dans les termes non linéaires** (ex: preuves d'existence par compacité):

- Théorie de l'homogénéisation
- Lien avec la polyconvexité (important en calcul des variations / élasticité non linéaire : cf. Ball '77, livres de Philippe Ciarlet)
- Existence de solutions faibles pour les lois de conservation scalaires et les systèmes hyperboliques 2x2 (Tartar, Di Perna, Serre...)
- ...

Retour sur l'homogénéisation : développement à 2 échelles

Méthode répandue et souvent source d'inspiration : on fait l'Ansatz

$$u_\varepsilon(x) \;=\; \bar{u}(x) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots,$$

où les $y \mapsto u_i(x,y)$ sont périodiques. On injecte dans $-\operatorname{div} a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = f$, utilise $\nabla = \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y$ et trie en puissance de ε (notation $y = \frac{x}{\varepsilon}$):

$$\begin{aligned} f(x) &= -\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon)(x) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\Big(\operatorname{div}_y \big(a(y)\nabla_x \bar{u}(x)\big) + \operatorname{div}_y \big(a(y)\nabla_y u_1(x,y)\big)\Big) \\ &\quad -\Big(\operatorname{div}_x \big(a(y)\nabla_x \bar{u}(x)\big) + \operatorname{div}_y \big(a(y)\nabla_x u_1(x,y)\big) \\ &\qquad + \operatorname{div}_x \big(a(y)\nabla_y u_1(x,y)\big) + \operatorname{div}_y \big(a(y)\nabla_y u_2(x,y)\big)\Big) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Conditions nécessaires : terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ nul, terme d'ordre 1 égale f.

Développement à 2 échelles

L'identité $\mathrm{div}_y\left(a(y)\nabla_x \bar{u}(x)\right) + \mathrm{div}_y\left(a(y)\nabla_y u_1(x,y)\right) = 0$ implique par linéarité $u_1(x,y) = \nabla\bar{u}(x)\cdot\nabla\phi(y)$ (cf. x est un paramètre), où ϕ_i satisfait

$$-\,\mathrm{div}\, a(y)(e_i + \nabla\phi_i(y)) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{T}^d.$$

En prenant l'intégrale sur $y \in \mathbb{T}^d$ du terme d'ordre 1 (cf. $\langle\cdot\rangle$), on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= -\,\mathrm{div}_x\left(\langle a(\mathrm{Id}+\nabla_y\Phi)\rangle\,\nabla_x\bar{u}(x)\right)\\ &\quad + \underbrace{\left\langle \mathrm{div}_y\left(a\nabla_x u_1(x,\cdot) + a\nabla_y u_2(x,\cdot)\right)\right\rangle}_{=0}. \end{aligned}$$

Conclusion : on peut penser que $u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}$ dans $H^1_0(D)$ où $\bar{u}$ satisfait l'**équation homogénéisée** $-\,\mathrm{div}(\bar{a}\nabla\bar{u}) = f$ dans D, avec **coefficients homogénéisés** $\bar{a} = \langle a(\mathrm{Id}+\nabla\phi)\rangle$, où les **correcteurs** ϕ satisfont $-\,\mathrm{div}(a(y)(\mathrm{Id}+\nabla\phi(y)) = 0$ dans $\mathbb{T}^d$.

Justification dans L^∞ par principe du maximum (scalaire !) : Bensoussan, Lions, Papanicolaou (basé sur Edward Larsen et Joe Keller)

Justification par fonctions-tests oscillantes de Tartar

On considère deux équations simultanément : équation d'intérêt et l'équation du correcteur adjoint

$$-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } D, \quad -\operatorname{div} a'(\mathrm{Id} + \nabla \phi') = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d.$$

Estimations a priori : $u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}$ dans $H^1(D)$ (donc convergence forte de u_ε dans $L^2(D)$ par Rellich), $a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup F$ dans $L^2(D)$.

Idée de Tartar : tester la première équation avec $x \mapsto \chi(x)(x_i + \varepsilon \phi_i'(\frac{x}{\varepsilon}))$ et la seconde avec $u_\varepsilon \chi$, où χ est à support dans D. On obtient après intégrations par parties

$$\begin{aligned}
\int (x_i + \varepsilon \phi_i'(\tfrac{x}{\varepsilon})) \nabla \chi \cdot a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon(x) dx \quad &- \quad \int \chi (x_i + \varepsilon \phi_i'(\tfrac{x}{\varepsilon})) f(x) dx \\
&= \quad - \int \chi (e_i + \nabla \phi_i'(\tfrac{x}{\varepsilon})) \cdot a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon(x) dx \\
\int u_\varepsilon \nabla \chi(x) \cdot a_\varepsilon'(e_i + \nabla \phi_i'(\tfrac{x}{\varepsilon})) dx \quad &= \quad - \int \chi \nabla u_\varepsilon(x) \cdot a_\varepsilon'(e_i + \nabla \phi_i'(\tfrac{x}{\varepsilon})) dx.
\end{aligned}$$

Justification par fonctions-tests oscillantes de Tartar

En soustrayant les deux égalités, on peut passer à la limite et on obtient

$$\int x_i \nabla \chi \cdot F(x) dx - \int \chi x_i f(x) dx = \int \bar{u} \nabla \chi(x) \cdot \bar{a}' e_i dx,$$

qui se récrit par intégrations par parties en utilisant $-\operatorname{div} F = f$

$$-\int \chi e_i \cdot F dx = -\int \bar{a} \nabla \bar{u} \cdot e_i \chi dx,$$

et donc $F = \bar{a} \nabla \bar{u}$ dans $L^2(D)$: $a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{a} \nabla \bar{u}$, d'où $-\operatorname{div} \bar{a} \nabla \bar{u} = f$ (qui est bien posée car $\bar{a}$ est coervive).

Remarque : Par compacité par compensation, on a aussi directement

$$\int \chi a'_\varepsilon (e_i + \nabla \phi'_i(\tfrac{x}{\varepsilon})) \cdot \nabla u_\varepsilon(x) dx \to \int \chi \bar{a}' e_i \cdot \nabla \bar{u}(x) dx.$$

Méthode au coeur du livre "asymptotic analysis for periodic structures" de Bensoussan, Lions & Papanicolaou

Interprétation et questions

La solution de $-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f$ converge faiblement dans $H^1_0(D)$ vers la solution de $-\operatorname{div}(\bar{a}\nabla \bar{u}) = f$.

$\rightarrow$ L'équation elliptique est stable par oscillations des coefficients

Remarque : la preuve fonctionne pour les systèmes

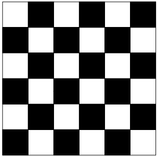
Questions :

- Quelle information perd-on dans la limite faible $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla \bar{u}$?
- Etant donné un mélange de matériaux α et β, que peut-on atteindre comme $\bar{a}$?
- Existe-t-il des classes d'équations qui ne sont pas stables par oscillations ?

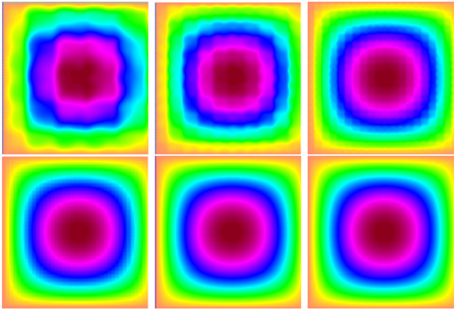
L'homogénéisation avec FreeFEM

Matériau en damier avec $a = \alpha \mathrm{Id}$ (resp. β) sur les cases noires (resp. blanches). Résolution de $-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 1$ dans $H_0^1(Q)$ pour différentes valeurs de ε.

Coefficients:



Solutions:



$\varepsilon = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40, 1/80, 0$

Remarque: $\bar{a} = \sqrt{\alpha\beta}\mathrm{Id}$ (formule de Dykhne)

La reconstruction des oscillations

D'après le développement à deux échelles formel, on s'attend à $\nabla u_\varepsilon(x) \simeq \nabla \bar{u}(x)(\mathrm{Id} + \nabla\phi(\frac{x}{\varepsilon}))$.

Théorème (Murat-Tartar)

On a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla \bar{u}(x)(\mathrm{Id} + \nabla\phi(\tfrac{x}{\varepsilon}))\|_{L^1(D)} = 0.$$

Remarque : La norme $L^1(D)$ peut être améliorée.

Preuve : Argument du type
convergence faible + convergence des normes $\implies$ convergence forte
basé sur la convergence de l'énergie

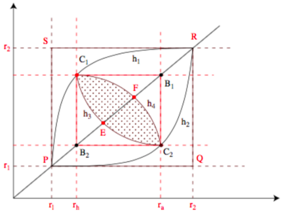
$$\int_D \nabla u_\varepsilon \cdot a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = \int_D u_\varepsilon f \to \int_D \bar{u} f = \int_D \nabla \bar{u} \cdot \bar{a} \nabla \bar{u},$$

(ici, convergence faible par compacité par compensation + équi-intégrabilité de $|\nabla\phi|^2$ par Meyers).

La H-fermeture

Question précise : étant donnés deux matériaux $\alpha\mathrm{Id}$ et $\beta\mathrm{Id}$ en proportions θ et $1-\theta$, quel est l'ensemble des coefficients homogénéisés $\bar{a}$ atteignables ?

Réponse de Tartar :



- Il était suprenant d'obtenir $\bar{a}$ non isotrope à partir de matériaux isotropes (ex: lamellés)
- Problème très difficile en général : équivalent à quasiconvexifier une fonction (pas d'algorithme général)
- Important en pratique pour l'optimisation de forme ! [Quand on veut optimiser la répartition de deux matériaux pour un usage spécifique, on se retrouve à optimiser dans la H-fermeture, cf. contributions de Grégoire Allaire, etc.]

La stabilité par oscillations... ou pas

4 exemples du laboratoire :

(i) Le terme étrange venu d'ailleurs de François et Doina Cioranescu

(ii) La subtilité des conditions d'ellipticité en élasticité linéaire par Hervé

(iii) Inclusions rigides par Marc Briane

(iv) L'homogénéisation des lois de conservation scalaire par Anne-Laure

Exemple (ii) : Perte d'ellipticité stricte par homogénéisation en élasticité linéaire (Geymonat, Müller, Triantafyllidis, Gutierrez).

Exemple (iii) : Si $\sup |a_\varepsilon| = \frac{1}{\varepsilon}$ (matériau de plus en plus rigide), on peut converger vers un problème non local pour $d \geq 3$.

Exemple (iv) : La classe des lois de conservation scalaires n'est pas fermée par homogénéisation, mais la classe des formulations cinétiques est fermée par homogénéisation.

Le terme étrange...

On considère le problème suivant dans le domaine à trou pour $d \geq 3$ (par simplicité)

$$-\triangle u_\varepsilon = f \text{ dans } D_\varepsilon, \ u_\varepsilon|_{\partial D_\varepsilon} = 0,$$

où $D_\varepsilon = D \setminus \Big(\cup_{z \in \mathbb{Z}^d} B_{\varepsilon^\alpha}(\varepsilon z) \Big)$ pour un $\alpha \geq 1$: beaucoup de petits trous, mais potentiellement de plus en plus petits (si $\alpha > 1$).

Théorème (Cioranescu-Murat)

On étend u sur D (prolongement par zéro dans les trous). Trois cas:

- *Si $\alpha < \frac{d}{d-2}$, alors $u_\varepsilon \rightharpoonup 0$ dans $H^1_0(D)$;*
- *Si $\alpha = \frac{d}{d-2}$, alors $u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}$ solution de $-\triangle \bar{u} + \mu \bar{u} = f$ dans D, où μ est explicite.*
- *Si $\alpha > \frac{d}{d-2}$, alors $u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}$ solution de $-\triangle \bar{u} = f$.*

Remarque : problème correspondant pour Neumann (problème de la torsion) par Doina Cioranescu et Jeanine Saint Jean Paulin.

Et bien d'autres résultats

- H-convergence (généralisation au cas non périodique : résultat général de compacité) : Murat & Tartar
- Bornes optimales en élasticité : Francfort & Murat
- Variations sur les termes étranges (ou pas) et influence de la géométrie : Casado Diaz...
- Liens avec les ondes de Bloch (cf. physique des solides) : Vanninathan, Conca, Allaire...
- Robustesse vis à vis des CI oscillantes (H-mesures / mesures de défaut) : Tartar / Gérard
- ...

Les résultats du LJLL font le tour du monde...

- Allemagne, Etats-Unis, Italie, UK, Russie...
- A Bonn à la fin des années 80 : cours de Luckhaus, Alt sur le passage de Stokes à Darcy
- A NYU : Papanicolaou, cours de Majda sur la diffusion effective en convection turbulente, travaux de Kohn et Strang, etc.
- A Carnegie-Mellon : cours de Tartar

  > Felix Otto (premières leçons JLL sur l'homogénéisation !) : *During my postdoc at CMU I took wonderfully leisurely course with Tartar, it was on right Sobolev spaces for div and curl.*

- A la SISSA : groupe de Dal Maso sur le terme étrange...
- Série de workshops "Composite Media and Homogenization"
- Réseau européen "MULTIMAT"

L'homogénéisation comme outil de modélisation

Les années 1980 et 1990

Premiers exemples

- Convergence de l'équation Stokes dans un domaine à trous vers l'équation de Darcy (Sanchez-Palencia/Tartar, puis Allaire et la reconstruction de la pression)
- Modélisation des matériaux composites en élasticité non linéaire : flambage microscopique, perte d'ellipticité par Stefan Müller avec Pippo Geymonat & Nick Triantafyllidis (mécanique) fait à Paris:

> Stefan Müller :
> *During that time (I think in Nov 1985) François Murat visited Heriot-Watt and gave me a crash-course in homogenization, H-convergence etc. The main take home message was 'always use oscillating test functions'. This led to my first paper ARMA 1987 on homogenization in elasticity. John Ball spent a sabbatical in Paris and was kind enough to take his PhD students with him. The laboratoire Analyse Numerique was an amazing experience.*

Le tournant : la convergence à 2 échelles

Travaux de Gabriel Nguetseng et de Grégoire Allaire : manière systématique de (ne pas) construire les fonctions-tests de Tartar.

Théorème (Nguetseng, Allaire)

Soit u_ε une suite bornée de $L^2(D)$. Alors il existe $\bar{u} \in L^2(D \times \mathbb{T}^d)$ telle que (à extraction près) on ait pour tout $v \in C_c^\infty(D, C^\infty(\mathbb{T}^d))$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_D u_\varepsilon(x) v(x, \tfrac{x}{\varepsilon}) dx = \int_D \int_{\mathbb{T}^d} \bar{u}(x,y) v(x,y) dy dx.$$

Application à l'homogénéisation : remplacer les fonctions-tests oscillantes de Tartar par $\psi_1(x) + \varepsilon \psi_2(x, \frac{x}{\varepsilon})$ et utiliser la notion de convergence forte à 2 échelles (i.e. convergence des normes L^2).

La simplicité des arguments popularise l'homogénéisation et en fait un outil de modélisation !

Voir aussi l'éclatement périodique et les travaux indépendants de Cioranescu, Damlamian, Donato, Griso, et de Casado Diaz.

Application en bio : Propagation du son dans les poumons

Travaux de Paul Cazeaux, Céline Grandmont et Yvon Maday.

Modèle : équation des ondes linéaires dans la "matrice", fluide parfait compressible irrotationnel dans les alvéoles. Inconnues : déplacement dans le solide, déplacement + densité + pression dans le fluide.

Approche : linéarisation autour d'un équilibre pour le fluide + régime harmonique (on envoie une onde plane)

$$
\begin{aligned}
-\rho_s \omega^2 \mathbf{u}_\varepsilon - \mathrm{div}\sigma_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) &= \mathbf{f}, && \text{in } \Omega_{S,\varepsilon},\\
-\rho_g \omega^2 \mathbf{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon &= \nabla g, && \text{in } \Omega_{F,\varepsilon},\\
\frac{1}{c^2} p_\varepsilon + \rho_g \mathrm{div}(\mathbf{u}_\varepsilon) &= 0, && \text{in } \Omega_{F,\varepsilon},\\
-p_\varepsilon \mathbf{n}_\varepsilon^S &= \sigma_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)\mathbf{n}_\varepsilon^S, && \text{on } \Gamma_\varepsilon^I,\\
\mathbf{u}_\varepsilon|_{\Omega_{S,\varepsilon}} \cdot \mathbf{n}_\varepsilon^S &= \mathbf{u}_\varepsilon|_{\Omega_{F,\varepsilon}} \cdot \mathbf{n}_\varepsilon^S, && \text{on } \Gamma_\varepsilon^I,\\
\mathbf{u}_\varepsilon &= \mathbf{0}, && \text{on } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

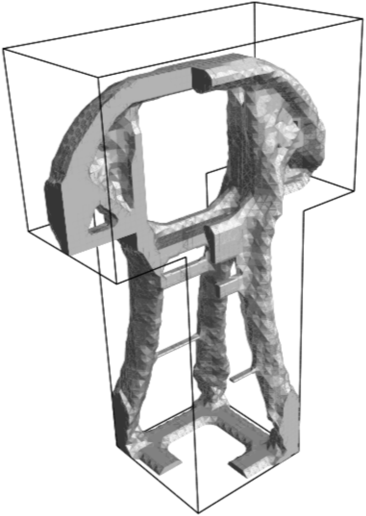
Homogénéisation par convergence à deux échelles

L'homogénéisation comme outil de simulation

Les années 1990 et 2000

Optimisation de forme par homogénéisation

Minimiser le poids / compliance en autorisant des matériaux perforés...
Grégoire Allaire & François Jouve



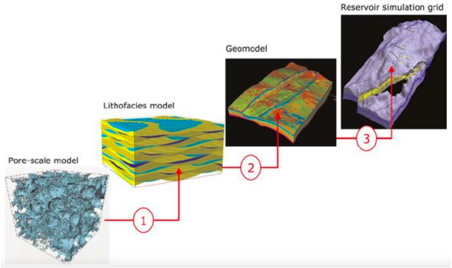
Le renouveau...

Tout comme les solutions u_ε, l'intérêt de la communauté pour l'homogénéisation a oscillé dans le temps !

Renouveau : aspects numériques avec les approches multiéchelles

- occasion manquée au labo ?
- pionniers : Ivo Babuska, Tom Hou, Weinan E, Bjorn Engquist, etc.

Application : les pétroliers (optimisation de l'extraction du pétrole)



Elements finis multiéchelles

Objectif : adapter l'espace discret à l'opérateur

Rappel de l'homogénéisation périodique : pour $-\mathrm{div}(a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f$, on a $u_\varepsilon \simeq \bar{u}(x) + \varepsilon \nabla \bar{u}(x) \cdot \phi(\frac{x}{\varepsilon})$

Observation : $\bar{u}$ facilement approchable dans un espace EF standard V_H (de taille H permettant d'approcher f), mais pas u_ε (cf. nécessite un pas de maillage $h \ll \varepsilon \ll 1$).

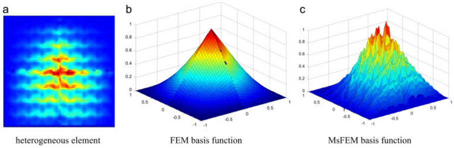
Espace EF P1 multiéchelle : remplacer les fonctions $v_H \in V_H$ par $v_{H,\varepsilon} = v_H + \nabla v_H \cdot \Phi_\varepsilon \in V_{H,\varepsilon}$ pour Φ_ε définie sur le simplexe T par

$$-\mathrm{div}(a_\varepsilon(\mathrm{Id} + \nabla \Phi_\varepsilon)) = 0 \text{ dans } T, \quad \Phi_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial T$$

(ou l'approximation sur un maillage de taille h sur T).

Formulation variationnelle dans $V_{H,\varepsilon}$.

Variantes et analyse numérique

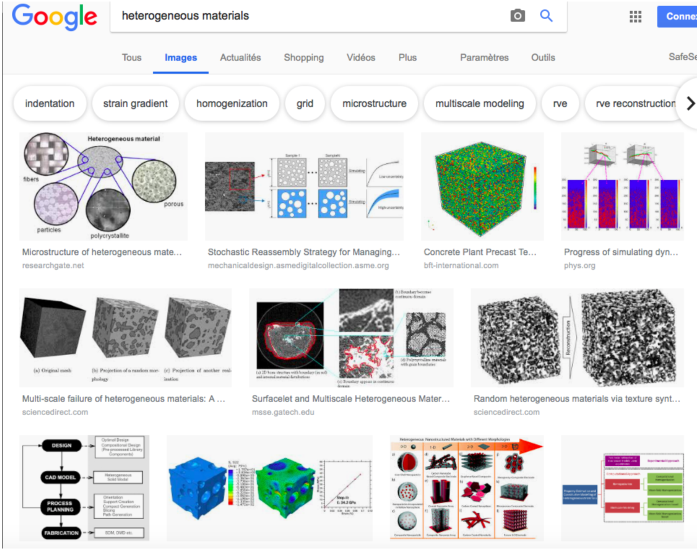


Variantes : EF ordre élevé, méthode de Petrov-Galerkin, sur-échantillonnage etc.

Analyse numérique :

- quantitative dans le cas périodique
- qualitative dans le case général : H-convergence numérique...

Mais qu'est-ce qu'un matériau hétérogène ?



L'homogénéisation à la croisée des EDP et des probabilités

Les années 2010...

Questions typiques

Comme dans le cas périodique : comprendre les oscillations

- approximation numérique des coefficients homogénéisés
- approximation des correcteurs
- estimations des erreurs

Aspect supplémentaire : comprendre les fluctuations

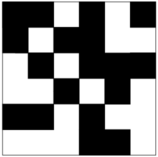
- fluctuation de l'approximation des coefficients homogénéisés
- fluctuation de solution du problème à ε fixé
- caractérisation des lois limites...

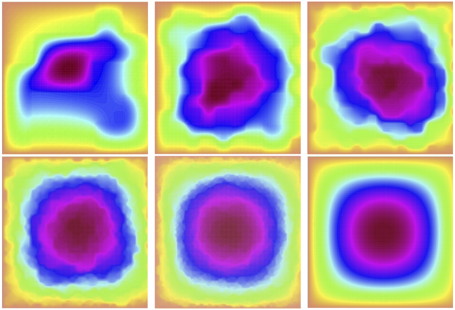
Questions ? Bureau 15-16.310 !

Matériau en damier avec $a = \alpha \mathrm{Id}$ (resp. β) sur les cases noires (resp. blanches). Résolution de $-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 1$ dans $H^1_0(Q)$ pour différentes valeurs de ε.

Solutions:

Coefficients:





$\varepsilon = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40, 1/80, 0$

Remarque: $\bar{a} = \sqrt{\alpha\beta}\mathrm{Id}$ (formule de Dykhne)

Merci beaucoup à

- Grégoire Allaire
- Andrea Braides
- Gilles Francfort
- Bob Kohn
- Stefan Müller
- François Murat
- Felix Otto
- George Papanicolaou

pour les discussions m'ayant aidé à préparer cet exposé !

Quelques livres