I Distributions harmoniques

L'exemple fondamental en théorie de la régularité pour les opérateurs elliptiques est fourni par le cas des distributions harmoniques.

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est dite harmonique sur Ω si

$$(1) \qquad \Delta T = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

ce qui signifie que

$$(2) \qquad \langle T, \Delta\varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nous montrerons dans cette section le

<u>Théorème I.1</u> (dit de Weyl) Toute distribution harmonique dans Ω est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

<u>Remarque 1</u> Il s'agit du résultat peut-être le plus frappant de régularité a priori : avec les hypothèses les plus "larges" sur T (T est juste une distribution), on obtient la régularité la plus "forte" (T est de classe $\mathcal{C}^\infty$) si on fait l'hypothèse que T vérifie (1). On pourra même montrer que sous l'hypothèse du

Théorème I.1 T est même analytique.

<u>Remarque 2</u> Le Théorème I.1 serait de peu d'utilité si les fonctions harmoniques (nous pouvons maintenant parler de fonction sans restreindre le propos) étaient peu nombreuses ou de forme explicite simple.
Pour $N = 1$ et Ω un intervalle, les seules fonctions harmoniques sont les fonctions affines. Par contre, dès que $N \geq 2$ l'espace vectoriel des fonctions harmoniques sur Ω est de dimension infinie.

Il existe de nombreuses démonstrations du Théorème I.1, certaines requièrent plus de régularité à priori sur T (par exemple $T \in L^1_{loc}$).
La démonstration que nous choisissons se réfère à l'importante notion de <u>solution fondamentale</u>, que nous utiliserons encore à plusieurs reprises

<u>I.1 Solution fondamentale pour le Laplacien</u>

Une solution fondamentale pour un opérateur différentiel à coefficients constants $L(D)$ agissant sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ qui vérifie l'équation

(3) $$L(D)E = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

où δ désigne la distribution de Dirac à l'origine,

$$\langle \delta , \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

L'intérêt d'une solution fondamentale réside dans le fait que si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ est une distribution à support compacte, alors une solution de l'équation

$$L(D)\,T = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

est fournie par la convolution

$$T = E * f .$$

En effet, puisque $L(D)$ est à coefficients constants, il commute avec la convolution de sorte que

$$\begin{aligned} L(D)(E * f) &= (L(D)E) * f \\ &= \delta * f \\ &= f . \end{aligned}$$

La proposition suivante fournit une solution fondamentale pour le Laplacien. En raison de l'isotropie du Laplacien, il est naturel de l'avoir cherchée sous forme radiale.

<u>Proposition I.2</u> Les distributions

$$E_1(x) = \frac{1}{2} |x| \quad \text{pour } N = 1$$

$$E_2(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x| \quad \text{pour } N = 2$$

$$E_N(x) = \frac{1}{\omega_{N-1}(2-N)} |x|^{2-N} \quad \text{pour } N \geqslant 3$$

$$(\omega_{N-1} = |S^{N-1}|)$$

sont des solutions fondamentales pour le Laplacien dans $\mathbb{R}^N$

Remarque 3 Les fonctions $E_N(x)$ sont indéfiniment différentiables en dehors de l'origine et leur singularité à l'origine est localement intégrable, ce qui en fait bien des distributions. Elles sont de plus à croissance au plus polynomiale à l'infini, ce qui en fait des distributions tempérées.

Preuve de la Proposition I.2

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, il nous faut montrer que

$$\langle E_N, \Delta\varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \varphi(0),$$

c'est-à-dire puisque E_N est localement intégrable que

$$\int_{\mathbb{R}^N} E_N(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

Par les propriétés de l'intégrale de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N} E_N(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\delta)} E_N(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx.$$

Puisque E_N est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine, nous pouvons intégrer deux fois par parties dans l'expression

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\delta)} E_N(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\delta)} \nabla E_N(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx - \int_{\partial B(0,\delta)} E_N(y)\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\delta)} \Delta E_N(x)\,\varphi(x)\,dx + \int_{\partial B(0,\delta)} \frac{\partial E_N}{\partial r}(y)\,\varphi(y)\,dy - \int_{\partial B(0,\delta)} E_n(y)\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}(y)\,dy,$$

$$= I_1(\delta) + I_2(\delta) + I_3(\delta).$$

Pour $x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$, $E_N(x) = g_N(|x|)$

$$\Delta E_N(x) = \frac{\partial^2 g_N}{\partial r^2}(|x|) + \frac{N-1}{|x|}\,\frac{\partial g_N}{\partial r}(|x|) = 0$$

de sorte que $I_1(\delta)\equiv 0$.

Pour $I_2(\delta)$, on a

$$\int_{\partial B(0,\delta)} \frac{\partial E_N}{\partial r}(y)\,\varphi(y)\,dy = \frac{1}{\delta^{N-1}\omega_{N-1}}\int_{\partial B(0,\delta)}\varphi(y)\,dy = \fint_{\partial B(0,\delta)}\varphi(y)\,dy$$

de sorte que $I_2(\delta)\to\varphi(0)$ quand $\delta\searrow 0$.

Enfin,

$$|I_3(\delta)| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)}\cdot\int_{\partial B(0,\delta)} E_N(y)\,dy$$

$$= \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)}\cdot\frac{\delta^{2-N}}{\cancel{\omega_{N-1}}(2-N)}\cdot\cancel{\omega_{N-1}}\cdot\delta^{N-1}$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{qd } \delta\searrow 0$$

I.2 Effet régularisant à distance

Le fait que E_N soit régulière en dehors de l'origine implique la régularité de la convolution $E_N * f$ en dehors du support de la distribution f.

Proposition I.3 Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ une distribution à support compact F. Alors la restriction de $E_N * f$ à $\mathbb{R}^N \setminus F$ est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N \setminus F)$.

Dans la suite nous utiliserons fréquemment la notion suivante :

Définition Soit $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ avec K compact et Ω ouvert. On appelle fonction plateau pour K dans Ω toute fonction $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $0 \leq \chi \leq 1$ et $\chi(x) \equiv 1$ sur un voisinage de K. (L'existence d'un telle fonction est un exercice facile)

Preuve de la Proposition I.3

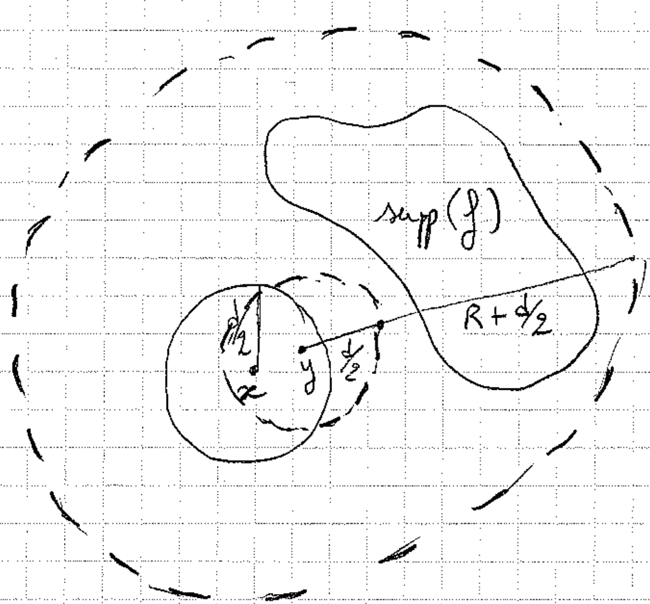
Soit $R > 0$ tel que $supp(f) \subset B(0, R)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^N \setminus F$ et $d = dist(x, \mathbb{R}^N \setminus F)$.

Par localisation, il suffit de montrer que la restriction de $E_N * f$ à $B(x, \frac{d}{2})$ appartient à $\mathcal{C}^\infty$.

Soit χ une fonction plateau pour $\overline{B(0, 2R+\frac{3d}{2}) \setminus B(0, d/2)}$ dans $B(0, 2R+2d) \setminus \overline{B(0, \frac{d}{4})}$.

Par construction, la restriction de $E_N * f$ à $B(x, \frac{d}{2})$ se confond avec la restriction de $(\chi E_N) * f$ à ce même ensemble (voir figure).
Mais $\chi E_N \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ de sorte que $\chi E_N * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et la conclusion suit.



$y \in B(x, d/2)$

$\min |y-z|,\ z \in supp(f) \geq \frac{d}{2}$

$\sup |y-z|,\ z \in supp(f) \leq 2R + \frac{3d}{2}$

Nous pouvons maintenant aborder la

<u>Preuve du Théorème I.1</u>

Soit K un compact dans Ω et χ un fonction plateau pour K dans Ω. La distribution à support compact χT vérifie

$$\begin{aligned} \Delta(\chi T) &= \chi \Delta T + 2 \nabla \chi \nabla T + T \Delta \chi \\ &= \chi \Delta T + 2 \operatorname{div}(\nabla \chi T) - T \Delta \chi \\ &= 2 \operatorname{div}(\nabla \chi T) - T \Delta \chi \end{aligned}$$

Puisque χT est à support compact, nous avons

$$E_N * \Delta(\chi T) = \Delta E_N * (\chi T) = \chi T$$

de sorte que

(4) $$\chi T = E_N * \left[2 \operatorname{div}(\nabla \chi\, T) - T \Delta \chi \right]$$

Le support de la distribution $G \equiv 2 \operatorname{div}(\nabla \chi T) - T \Delta \chi$ est inclus au support de $\nabla \chi$ qui lui même est inclus à $\Omega \setminus K$.

La proposition I.3 nous assure alors que

$$\chi T \in \mathcal{C}^\infty(K).$$

Puisque $\chi \equiv 1$ sur K et que $K \subset \Omega$ est quelconque, le Théorème est démontré. ∎

<u>Remarque 4</u> a) La démonstration du Théorème I.1 est typique de ce que l'on appelle fréquemment le traitement des termes de bord. Ceux-ci, la distribution G dans la preuve, ne vivent que là où on a coupé T au moyen de χ. Leur extension au centre au moyen de la convolution par la solution fondamentale possède d'excellentes propriétés de régularité.

b) Il peut être souhaitable, en plus de connaître la régularité de T, d'obtenir des estimations sur les normes $\mathcal{C}^k(K)$ de T. Puisque tout multiple d'un fonction harmonique est encore harmonique on ne peut espérer d'estimation absolue, mais uniquement relative à une norme plus faible de T. Ceci n'est pas bien difficile au vu de l'équation (4) et de la forme explicite de E_N.

<u>Théorème I.4</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ borné et $u \in L^1(\Omega)$ une fonction harmonique sur Ω. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $K \subset \Omega$ compact il existe une constante $C(k, K, \Omega)$ telle que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(K)} \leq C(k, K, \Omega) \|u\|_{L^1(\Omega)},$$

où $C(k, K, \Omega)$ ne dépend que de k et de $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$.

<u>Preuve du Théorème I.4</u> Nous reprenons (4) et écrivons, pour n'importe quel multi-indice α de longueur au plus k

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(\chi u) &= \partial^\alpha E_N * [2 \operatorname{div}(\nabla\chi u) - u \Delta\chi] \\ (5) \qquad &= 2 \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} \partial^\alpha E_N * \nabla\chi u - \partial^\alpha E_N * u \Delta\chi \end{aligned}$$

Soit $\delta = \operatorname{dist}(K, \operatorname{supp}(\nabla\chi))$. Nous avons

$$(6) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^N \setminus B(0,\delta)} |\partial_{x_i} \partial^\alpha E_N(x)| + |\partial^\alpha E_N(x)| \leq C(k,\delta).$$

Puisque $\chi \equiv 1$ sur K, on obtient alors de (5), (6) et de l'inégalité de Young :

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(x)| \leq C(k,\delta) \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

La conclusion suit. ∎

<u>Exercice</u> 1 Expliciter la constante $C(k, K, \Omega)$ du théorème précédent dans le cas où $\Omega = B(0,R)$ et $K = \overline{B(0, R/2)}$. Il suffit pour cela de chiffrer (6) en terme de k et R.

On envisagera aussi le cas $\Omega = B(0,R)$ et $K = B(0,r)$ avec $0 < r < R$ et on explicitera la constante en termes de k, r et $R-r$.

Lorsque T n'est plus une distribution harmonique mais vérifie $\Delta T = f$, en plus des termes de bord nous devrons obtenir, pour étudier la régularité de T, des estimations sur la convolution

$$E_n * f.$$

Ceci est l'object de la section suivante.

II Estimations classiques de potentiels

On appelle potentiel Newtonien d'une distribution f, lorsqu'elle est définie, la convolution

$$u \equiv E_N * f .$$

Nous verrons dans cette section que les espaces de fonctions Hölderiennes $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ et les espaces de Lebesgue L^p $(1<p<+\infty)$ possèdent de bonnes propriétés vis à vis du potentiel Newtonien. Plus précisément :

<u>Proposition II.1</u> a) Soit $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $0<\alpha<1$, à support compact. Alors le potentiel Newtonien u de f est continu, possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre 2, et de plus

$$|D^2 u|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C_N \, |f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \tag{7}$$

b) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1<p<+\infty$, alors le potentiel Newtonien u de f admet des dérivées faibles secondes dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\| D^2 u \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_{N,p} \, \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{8}$$

L'estimation (7) est appelée estimation de Schauder.
L'estimation (8) est appelée estimation de Calderon-Zygmund

<u>Remarque 1</u> Une manière de lire la Proposition II.1 consiste à dire que les noyaux de convolution $\partial_{x_i}\partial_{x_j} E_N$ opèrent à l'intérieur des espaces $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ et L^p. La théorie des intégrales singulières s'attache à montrer des propriétés similaires pour des noyaux de convolution plus généraux (voir par exemple le livre d'E. Stein).

Nous commencerons par donner la démonstration, élémentaire, de la partie a). La partie b) nécessite des outils plus sophistiqués tels que la décomposition de Calderon-Zygmund et le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.

<u>Preuve de la Proposition II.1 a)</u>
Supposons d'abord que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, de sorte que $E_N * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Nous allons montrer que (7) est vérifiée. Nous avons, pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $z \in \mathbb{R}^N$

$$\partial_{ij} u(x) = \frac{1}{\omega_{N-1}(2-N)} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i f(y) \frac{\partial}{\partial y_j} |x-y|^{2-N} dy$$

$$= \frac{1}{\omega_{N-1}(2-N)} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial y_i}\big(f(y)-f(z)\big) \frac{\partial}{\partial y_j} |x-y|^{2-N} dy .$$

Soient $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}^N$, $z = \frac{x_1+x_2}{2}$

et $\rho = |x_1 - x_2|$.

Nous pouvons écrire, pour $k = 1, 2$,

$$(2-N)\,\omega_{N-1}\,\partial_{ij} u(x_k) = \int_{|y-z|\geq \rho} \left(f(y) - f(z)\right) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} |x_k - y|^{2-N}\,dy$$

$$+ \int_{|y-z|\leq \rho} \left(f(y) - f(x_k)\right) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} |x_k - y|^{2-N}\,dy + \int_{\partial B(z,\rho)} \left(f(z) - f(x_k)\right) \frac{\partial}{\partial y_j} |x_k - y|^{2-N} n_i\,dS_y$$

$$= I_1(x_k) + I_2(x_k) + I_3(x_k).$$

On a

$$|I_2(x_k)| \leq |f|_{C^{0,\alpha}} \int_{|y-z|\leq \rho} C\,|x_k - y|^{\alpha - N}\,dy$$

$$\leq C \rho^\alpha |f|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)}.$$

On a aussi

$$|I_3(x_k)| \leq \rho^\alpha |f|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \int_{\partial B(z,\rho)} |x_k - y|^{1-N}\,dS_y$$

$$\leq C \rho^\alpha |f|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)}$$

Finalement, on a

$$I_1(x_1) - I_1(x_2) = \int_{|y-z|\geq \rho} (f(y)-f(z))\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}|x_1-y|^{2-N} - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}|x_2-y|^{2-N}\right)dy$$

D'autre part, on vérifie (propriété du dipole) que

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}|x_1-y|^{2-N} - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}|x_2-y|^{2-N}\right| \leq C\frac{|x_1-x_2|}{|y-z|^{N+1}}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^N \setminus B(z,\rho)$. On en déduit que

$$|I_1(x_1) - I_1(x_2)| \leq C\rho |f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \int_{|y-z|\geq\rho} |y-z|^{\alpha-N-1}\,dy$$

$$\leq C\rho |f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \int_\rho^\infty r^{\alpha-2}\,dr$$

$$\leq C\rho^\alpha |f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)}.$$

La conclusion suit donc, dans le cas où $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Supposons maintenant $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ à support compact. On approche f par une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{C}^0} f$$

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} = |f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$$

Une telle approximation s'obtient par exemple par convolution avec une approximation de δ.
Notons qu'en général on n'a pas $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}$!
On pose $u_n = E_N * f_n$, de sorte que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \; |D^2 u_n|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,|f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}.$$

Au sens des distributions (ou même dans $\mathcal{C}^2_{loc}$) on a $u_n \longrightarrow u = E_N * f$ et l'inégalité précédente implique que

$$|D^2 u|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,|f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}},$$

ce qui termine la démonstration. ∎

Il est temps maintenant d'aborder la partie b), qui, comme annoncé, nécessite plus de travail que dans le cas Höldérien.
Nous commencerons par traiter le cas $p = 2$, élémentaire.
Nous montrerons ensuite une version affaiblie du théorème lorsque $p = 1$ (rappelons que l'énoncé exclu le cas $p = 1$) et nous terminerons enfin par l'utilisation d'un principe général d'interpolation dans le cas où $1 < p < 2$ et par dualité dans le cas où $2 < p < +\infty$.

Preuve de la Proposition II.1 b) dans le cas $p = 2$

Supposons d'abord que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, de sorte que $E_N * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Lorsque $x \notin supp(f)$ on peut écrire, pour un multi indices α quelconque,

$$\partial^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, \partial^\alpha E_N(x-y)\, dy ,$$

de sorte que

$$(8a) \qquad |\partial^\alpha u(x)| \leq C(N,\alpha) \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} |x|^{2-N-|\alpha|}$$

lorsque $|x| \to +\infty$.

Au vu des estimations de décroissance (8a), nous pouvons écrire

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_{ij} u(x)|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \partial_{ijj} u(x)\, \partial_i u(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{jj} u(x)\, \partial_{ii} u(x)\, dx .$$

En prenant la somme sur i et j entre 1 et N nous obtenons

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_{ij} u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} .$$

La conclusion suit donc lorsque $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.
Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ quelconque, on commence par approcher f par une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ au sens de la norme L^2, on utilise alors l'étape précédente et un argument de fermeture pour conclure. ∎

L'argumentation qui précède, basée sur l'intégration par partie, ne s'étend pas au cas $p \neq 2$.
Une deuxième argumentation possible, basée sur la transformée de Fourier (la convolution par $\partial_{ij} E_N$ se traduit en Fourier par la multiplication par la fonction bornée $\xi_i \xi_j . \|\xi\|^{-2}$), ne s'étend pas elle non plus au cas $p \neq 2$.

Pour $1 < p < 2$, nous allons commencer par décomposer f en une partie L^2 et une partie de moyenne nulle. Cette décomposition est un cas particulier de la décomposition de Calderon-Zygmund que nous abordons maintenant.

<u>Lemme II.2</u> (dit de Calderon-Zygmund)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $t > 0$ fixés. Il existe un nombre au plus dénombrable de cubes disjoints C_n et une décomposition

(8b) $$f = g_t + h_t$$

qui soient tels que :

i) $f = g_t$ et $|f| \leq t$ p.p. dans $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_n C_n$

ii) $t < \displaystyle\fint_{C_n} |f| \leq 2^N t$ quel que soit n

iii) g_t est constante égale à $\displaystyle\fint_{C_n} f$ dans chaque C_n

En particulier, il suit de (8b), (i), (ii) et (iii) que

iv) $\displaystyle\sum_n |C_n| \leq \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}{t}$, $\displaystyle\int_{C_n} h_t = 0$

v) $\|g_t\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|h_t\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq 3 \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$

vi) $|g_t| \leq 2^N t$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$.

<u>Preuve du Lemme II.2</u>

On commence par fixer un entier ℓ suffisament grand pour que

$$\frac{1}{\ell^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx < t .$$

On considère les familles Q^m des cubes (ouverts) de côté $\ell/2^m$ obtenus par un quadrillage canonique de $\mathbb{R}^N$ dont l'origine est un des noeuds.
Par le choix de ℓ, quel que soit $C \in Q^0$ on a

$\int |f| < t.$

On pose $\mathcal{A}^0 = Q^0$ et $\mathcal{B}^0 = \emptyset$.

Supposons, pour $0 \leq m \leq m_0 \in \mathbb{N}$ quelconque, avoir construit deux familles $\mathcal{A}^m$ et $\mathcal{B}^m$ telles que

- $\mathcal{A}^m \cap \mathcal{B}^m = \emptyset$ et $\mathcal{A}^m \cup \mathcal{B}^m = Q^m$
- $\forall C \in \mathcal{A}^m$, soit $\int_C |f| < t$ soit il existe $m' < m$ et $C \subset C' \in Q^{m'}$ tel que $C' \in \mathcal{B}^{m'}$. $\forall C \in \mathcal{B}^m$, $t \leq \int_C |f| < 2^N t$.

Pour $C \in Q^{m_0+1}$ quelconque, si $\int_C |f| < t$ ou si il existe $m' < m_0+1$ et $C \subset C' \in Q^{m'}$ tel que $C' \in \mathcal{B}^{m'}$ alors on décide que $C \in \mathcal{A}^{m_0+1}$.
Sinon, on décide que $C \in \mathcal{B}^{m_0+1}$.
Dans ce dernier cas, remarquons que si $\hat{C}$ designe l'unique cube de Q^{m_0} qui contient C, alors nécessairement $\hat{C} \in \mathcal{A}^{m_0}$ mais même $\int_{\hat{C}} |f| < t$.

En conséquence, pour $C \in \mathcal{B}^{m_0+1}$ on a

$$t \leq \int_C |f| \leq 2^N \int_{\hat{C}} |f| \leq 2^N t.$$

Les familles $(\mathcal{A}^m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{B}^m)_{m \in \mathbb{N}}$ ainsi construites,

on pose $(C_n) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{B}^m$, $g_t = f$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \cup C_n$

et $g_t = \int_{C_n} f$ sur chaque C_n

Par construction, les cubes C_n sont disjoints et ii) et iii) sont vérifiées.

Soit x un point de Lebesgue de f dont toutes les coordonnées sont irrationnelles (presque tous les points x de $\mathbb{R}^N$ ont cette propriété). Si $x \in \mathbb{R}^N \setminus \bigcup C_n$, alors quel que soit $m \in \mathbb{N}$, si C^m désigne l'unique cube de Q^m (et donc aussi de $\mathcal{A}^m$) qui contient x on a

$$\fint_{C^m} |f| \leq t.$$

D'autre part, puisque x est à coordonnées irrationnelles, il existe une sous-suite m_k telle que x soit asymptotiquement le centre de C^{m_k} qd $k \to +\infty$. Par le théorème de dérivation de Lebesgue, on a alors

$$|f|(x) = \lim_{k \to +\infty} \fint_{C^{m_k}} |f| \leq t,$$

ce qui montre i) et termine la preuve. ∎

<u>Remarque</u> Il est fréquent de remplacer (8b) par

$$f = g_t + \sum_n h_{t,n}$$

où $h_{t,n} = h_t \, 1_{C_n}$.

Nous pouvons maintenant énoncé le

<u>Lemme II.3</u> Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ et $u = \partial_{ij}(E_N * f)$.
Il existe c_N telle que quel que soit $t > 0$,

$$t \cdot \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^N \text{ t.q. } |u(x)| > t \right\} \right| \leq c_N \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

<u>Preuve du Lemme II.3</u>

On commence par décomposer f au niveau t à l'aide du lemme précédent :

$$f = g_t + \sum_n h_{t,n} \, ,$$

et on pose $v_t = \partial_{ij}(E_N * g_t)$, $w_{t,n} = \partial_{ij}(E_N * h_{t,n})$.

Nous avons déjà démontré que

$$\|w_{t,n}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|h_{t,n}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left\| f - \fint_{C_n} f \right\|_{L^2(C_n)} ,$$

et puisque la projection sur les fonctions de moyenne nulle est une contraction dans L^2, on obtient

$$\sum_n \|w_{t,n}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \sum_n \|f\|_{L^2(C_n)} < +\infty .$$

Dès lors,

$$u = v_t + \sum_n w_{t,n} \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Clairement,

$$(8c) \quad \left| \left\{ |u(x)| > t \right\} \right| \leq \left| \left\{ |v_t(x)| > \frac{t}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ \left| \sum_n w_{t,n}(x) \right| > \frac{t}{2} \right\} \right|$$

Par l'inégalité de Čebyčev,

$$\left|\left\{ |v_t(x)| > \frac{t}{2} \right\}\right| \le 4t^{-2} \, \| v_t \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

$$\le 4t^{-2} \, \| g_t \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

(8d)
$$\le 4t^{-2} \, 2^N t \, \| g_t \|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

$$\le 3 \, 2^{N+2} \, t^{-1} \, \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^N)} ,$$

où on a utilisé les estimations déjà obtenues pour $p = 2$ ainsi que les propriétés $i) - v)$ de la décomposition de Calderon - Zygmund.

D'autre part, de la même manière,

$$\left|\left\{ \left| \sum w_{t,n}(x) \right| > \frac{t}{2} \right\}\right| \le \sum_n |2C_n| + \left|\left\{ x \in \mathbb{R}^N \setminus \cup 2\overline{C_n}, \left|\sum w_{t,n}(x)\right| > \frac{t}{2} \right\}\right|$$

(8e)
$$\le 2^N t^{-1} \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + 2t^{-1} \sum_n \| w_{t,n} \|_{L^1(\mathbb{R}^N \setminus 2\overline{C_n})} .$$

Il reste à évaluer $\| w_{t,n} \|_{L^1(\mathbb{R}^N \setminus 2\overline{C_n})}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^N \setminus 2\overline{C_n}$, on a

$$w_{t,n}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{ij} E_N(x-y) \, h_{t,n}(y) \, dy .$$

Puisque $h_{t,n}$ est de moyenne nulle, à support dans $\overline{C_n}$, on déduit, si x_n désigne le centre de C_n, que

$$w_{t,n}(x) = \int_{C_n} \left[\partial_{ij} E_N(x-y) - \partial_{ij} E_N(x-x_n) \right] . \, h_{t,n}(y) \, dy .$$

Comme dans le cas Höldérien, on utilise l'estimation du dipole :

$$|\partial_{ij} E_N(x-y) - \partial_{ij} E_N(x-x_n)| \leq C_N |y-x_n| . |x-x_n|^{-N-1}$$

valable pour $x \in \mathbb{R}^N \setminus 2\overline{C_n}$ et $y \in C_n$.

Dès lors,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus 2\overline{C_n}} |w_{t,n}(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus 2\overline{C_n}} |x-x_n|^{-N-1} dx \int_{C_n} C_N |y-x_n| |h_{t,n}(y)| dy$$

(8f) $$\leq C_N \operatorname{diam}(C_n)^{-1} \operatorname{diam}(C_n) . \|h_{t,n}\|_{L^1}$$

$$\leq C_N \|h_{t,n}\|_{L^1}$$

Puisque $\sum_n \|h_{t,n}\|_{L^1} \leq 3 \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ par v) ; la conclusion suit de (8c) - (8f). ■

<u>Preuve de la Proposition II.1 b) dans le cas $1 < p < 2$.</u>

Supposons d'abord que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Pour $t > 0$ fixé, on pose

$$f = f_{1,t} + f_{2,t}$$

où $f_{1,t} = f . \mathbb{1}_{\{|f(x)| > t\}}$ et $f_{2,t} = f - f_{1,t}$.

Notons que $f_{1,t} \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ et que $f_{2,t} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. On pose $u_{1,t} = \partial_{ij}(E_N * f_{1,t})$ et $u_{2,t} = \partial_{ij}(E_N * f_{2,t})$. Comme précédemment,

$$|\{|u(x)| > t\}| \leq |\{|u_{1,t}(x)| > t/2\}| + |\{|u_{2,t}(x)| > \tfrac{t}{2}\}|$$
$$\leq |\{|u_{1,t}(x)| > \tfrac{t}{2}\}| + 4t^{-2} \|u_{2,t}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} .$$

Par le lemme II.3 et la proposition II.1 b) dans le cas $p=2$ on obtient ainsi

$$(8g) \quad |\{|u(x)| > t\}| \leq C_N \left(t^{-1} \|f_{1,t}\|_{L^1} + t^{-2} \|f_{2,t}\|^2_{L^2} \right) .$$

Remarquons que

$$\|u\|^p_{L^p} = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p \, dx = p \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{|u(x)|} t^{p-1} \, dt \, dx$$
$$= p \int_0^\infty t^{p-1} |\{|u(x)| > t\}| \, dt ,$$

de sorte que par (8g),

$$\|u\|^p_{L^p} \leq C_N \left[\int_0^\infty t^{p-2} \|f_{1,t}\|_{L^1} dt + \int_0^\infty t^{p-3} \|f_{2,t}\|^2_{L^2} \, dt \right]$$

$$\leq C_N\left[\int_0^\infty t^{p-2}\int_{\{|f(x)|>t\}}|f(x)|\,dx\,dt+\int_0^\infty t^{p-3}\int_{\{|f(x)|\leq t\}}|f(x)|^2\,dx\,dt\right]$$

$$\leq C_N\left[\int_{\mathbb{R}^N}|f(x)|\int_0^{|f(x)|}t^{p-2}\,dt\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|f(x)|^2\int_{|f(x)|}^\infty t^{p-3}\,dt\,dx\right]$$

$$=2C_N\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2-p}\right)\|f\|_{L^p}^p.$$

Pour $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1<p<2$, quelconque, on commence par approcher f par une suite f_p de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ au sens de la norme L^p, on utilise alors l'étape précédente et un argument de fermeture pour conclure.

<u>Remarques</u> 1) La preuve ci-dessus est un cas particulier de ce que l'on appelle le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz : soit $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$, μ mesure de Radon sur Ω, $\Omega'\subseteq\mathbb{R}^{N'}$, μ' mesure de Radon sur Ω', soit $1\leq p<q<r\leq\infty$ et $T: L^p(\Omega,\mu)+L^r(\Omega,\mu)\longrightarrow\mathcal{M}(\Omega',\mu')$ une application sous-linéaire, si il existe $c'>0$ tel que $\forall t>0$

- $t^p\mu'(\{|Tu|(x')>t\})\leq C'\|u\|_{L^p}^p\quad\forall u\in L^p(\Omega,\mu)$
- $t^r\mu'(\{|Tv|(x')>t\})\leq C'\|v\|_{L^r}^r\quad\forall v\in L^r(\Omega,\mu)$

alors il existe $C>0$ telle que

$$\|Tu\|_{L^q(\Omega',\mu')}\leq C\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)}\qquad\forall u\in L^q(\Omega,\mu).$$

(voir par exemple [Willem] Chapitre 9)

2) La preuve de (8) dans le cas $1 < p < 2$ laisse à croire que la constante $C_{N,p}$ intervenant dans (8) diverge lorsque p se rapproche de 1 ou 2. Bien que cela s'avère correct lorsque p se rapproche de 1, il n'en est rien lorsque p se rapproche de 2. Cela découlera par exemple du Théorème de Marcinkiewicz lorsque nous aurons montré (8) pour $p > 2$.

<u>Preuve de la Proposition II.1 b) dans le cas $2 < p < +\infty$.</u>

Nous commençons une fois encore en supposant que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Nous avons, par dualité et densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$,

$$\| \partial_{ij} E_N * f \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \sup_{\substack{g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \\ \|g\|_{L^{p'}} = 1}} \langle g, \partial_{ij}(E_N * f) \rangle$$

Pour un tel g,

$$\begin{aligned} \langle g, \partial_{ij}(E_N * f) \rangle &= \langle \partial_{ij}(E_N * g), f \rangle \\ &\leq \| \partial_{ij}(E_N * g) \|_{L^{p'}} \cdot \| f \|_{L^p} \\ &\leq C_{N,p'} \, \| g \|_{L^{p'}} \, \| f \|_{L^p} \quad \text{car } 1 < p' < 2 \\ &\leq C_{N,p'} \, \| f \|_{L^p}. \end{aligned}$$

La conclusion suit par un argument de densité que nous ne répétons pas. ∎

III Estimations a priori de Schauder

Dans cette section, nous nous intéressons à l'équation

$$(9) \qquad \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \operatorname{div}(g) \quad \text{sur } \Omega$$

où $A(x) = \left(a_{ij}(x)\right)_{\substack{1\le i\le N\\ 1\le j\le N}}$ est une matrice symétrique à coefficients mesurables bornés qui vérifient la condition uniforme d'ellipticité

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2 \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^N$$

pour des constantes $0<\lambda\le\Lambda$ indépendantes de $x\in\Omega$.
On supposera toujours que $u\in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ de sorte que l'équation possède un sens dans les distributions.

Nous allons montrer la

<u>Proposition III.1</u> Si $u\in\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$ est une solution de (9) avec $A\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ et $g\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ alors quel que soit $K\subset\Omega$ compact on a l'estimation

$$(10) \qquad \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(K)} \leqslant C\left(\|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right)$$

où la constante C ne dépend que de N,Ω,K, $\|A\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$ ainsi que λ et Λ.

<u>Remarque 1</u> La solution u dans l'énoncé de la Proposition III.1 est supposée régulière. Plus avant dans le cours, nous verrons que toute solution de (S) qui se trouve dans $H^1(\Omega)$ est nécessairement de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, et que (10) peut être remplacée par

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(K)} \leq C\left(\|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

<u>Preuve de la Proposition III.1</u>

Soit $x_0 \in K$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. Quitte à opérer à une transformation orthogonale de variable, nous pouvons supposer que $A(x_0) = Id$. Soit χ une fonction plateau pour $\overline{B(x_0, r)}$ dans $B(x_0, 2r)$. La fonction $\hat{u} = \chi u$ vérifie l'équation

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla \hat{u}) = \chi \operatorname{div} g + \operatorname{div}(A(x)\nabla\chi u) + A(x)\nabla u \nabla \chi$$

que réécrivons sous la forme

$$\Delta \hat{u} = \operatorname{div}\left((Id - A(x))\nabla \hat{u} + \chi g + A(x)\nabla \chi u\right)$$

$$- g\nabla\chi + A(x)\nabla u \nabla \chi .$$

Puisque $\hat{u}$ est à support compact, nous avons alors

$$\hat{u} = E_N * \operatorname{div}\left[(Id - A(x))\nabla\hat{u} + \chi g + A(x)\nabla\chi u\right]$$

(11) $$+ E_N * \left[- g\nabla\chi + A(x)\nabla u \nabla\chi\right]$$

$$= f_1 + f_2$$

Par la Proposition II.1 (8) nous obtenons, pour $1 < p < +\infty$

$$\| D^2 f_2 \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \left[\|g\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \right]$$

où C dépend de N, p, r et $\|A\|_\infty$.

Par injection de Sobolev, on en déduit, fixant $p_\alpha > \frac{N}{1-\alpha}$, que

(12) $$| \nabla f_2 |_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left[\|g\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,p_\alpha}(\Omega)} \right].$$

D'autre part, pour $1 \leq i \leq N$ on a

$$\partial_i f_1 = \sum_{j=1}^{N} \partial_i \partial_j E_N * \left[(Id - A(x))\nabla\hat{u} + \chi g + A(x)\nabla\chi u\right].$$

Par la Proposition II.1 (9) nous obtenons alors

$$|\nabla f_1|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C_N \left|(Id - A(x))\nabla\hat{u}\right|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)}$$

$$+ C \left[\|g\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \right]$$

où C dépend de N, r, $\|A\|_{C^{0,\alpha}}$ mais C_N ne dépend que de N.

Observons que

$$|(Id - A(x))\nabla \tilde{u}|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq |Id - A(x)|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot \|\nabla \tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$
$$+ \|Id - A(x)\|_{L^\infty(B(x_0,2r))} \cdot |\nabla \tilde{u}|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)}.$$

et que $\|\nabla \tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_N r^\alpha |\nabla \tilde{u}|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)}$.

Choisissons maintenant r pour que

$$C_N^2 r^\alpha |Id - A(x)|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} + C_N \|Id - A(x)\|_{L^\infty(B(x_0,2r))} \leq \frac{1}{2}$$

(un tel choix peut être fait indépendament de x_0 puisque $A \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ et $A(x_0) = Id$.)

On obtient ainsi

(13) $$|\nabla f_1|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2} |\nabla \tilde{u}|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} + C\left[\|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,p_\alpha}(\Omega)}\right]$$

De (11), (12) et (13) on déduit que $([W^{1,p_\alpha} \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}])$

$$|\nabla \tilde{u}|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2} |\nabla \tilde{u}|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} + C\left[\|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,p_\alpha}(\Omega)}\right]$$

de sorte que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(B(x_0,r))} \leq C\left[\|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,p_\alpha}(\Omega)}\right].$$

Comme K est compact, par un simple argument de recouvrement on obtient

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(K)} \leq C\left[\|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,p_\alpha}(\Omega)}\right].$$

Il nous reste à passer dans le terme d'erreur de $\|u\|_{W^{1,p_\alpha}(\Omega)}$ à $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Cela se fait en utilisant un nombre suffisant (mais fini !) de fois la proposition suivante.

<u>Proposition III. 2</u> Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 2$ est une solution de (9) avec $A \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$ alors quel que soit $K \subset \Omega$ compact on a l'estimation

(14) $$\|u\|_{W^{1,p}(K)} \leq C \left(\|g\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right)$$

<u>Preuve de la Proposition III. 2</u>

Elle est similaire à celle de la Proposition III. 1

On la modifie en remplaçant (12) et (13) par

(15) $$\|D^2 f_2\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \left[\|g\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \right],$$

où $q = \frac{Np}{N+p}$ (de sorte que $W^{2,q} \hookrightarrow W^{1,p}$)

et

(16) $$\|\nabla f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + C \left[\|g\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \right]$$

(on utilise $A \in \mathcal{C}^0$ pour rendre petite la différence $\|Id - A(x)\|_{L^\infty(B(x_0, 2r))}$.)

Par injection de Sobolev et en utilisant un argument de recouvrement, on obtient alors

$$\|u\|_{W^{1,p}(K)} \leq c \left[\|g\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \right].$$

On conclut en remarquant que l'application $p \mapsto q = \frac{Np}{N+p}$ itérée un nombre fini de fois fait passer n'importe quel p en dessous de 2.

IV Existence locale de solutions régulières

L'une des nombreuses avancées liées à l'analyse fonctionnelle au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle a été de reconnaître que les estimations a priori (qui présupposent l'existence d'une solution) permettent également de démontrer l'existence des dites solutions.

Pour exemplifier ce propos, nous allons construire des solutions de l'équation (9) où A désigne ici encore une matrice à coéfficients bornés mesurables satisfaisant à la condition d'ellipticité (9.bis).

<u>Proposition IV.1</u> On suppose que $A \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{B(x_0,R)})$ et que $g \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{B(x_0,R)})$. Il existe une constante $\eta > 0$ ne dépendant que de N telle que si

$$(17) \qquad \left(1 + \|A\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{B(x_0,R)})}\right) \cdot R^{\alpha} \leq \eta$$

alors il existe une solution de (9) sur $\Omega = B(x_0,R)$ qui appartient à $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ et qui vérifie l'estimation

$$(18) \qquad \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \, \|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

<u>Remarque 1</u> Dans la pratique, la matrice Ω et la donnée g seront données sur un grand ensemble Ω. La Proposition IV.1 permet de construire localement ((17) est

vérifiée si R est suffisament petit) des solutions avec de bonnes estimées.

Preuve de la Proposition IV.1

Sans perte de généralité, on peut supposer que $g(x_0) = 0$ et que $A(x_0) = Id$.
Comme dans la Section III, l'idée est de réécrire l'équation sous la forme

(19) $$\Delta u = \operatorname{div}((Id - A(x))\cdot\nabla u) + \operatorname{div} g \quad \text{dans } \Omega$$

qui formellement se ramène à

(20) $$u = E_N * \operatorname{div}\big((Id - A(x))\cdot \nabla u + g\big).$$

On tentera ensuite de résoudre (20) par un théorème de point fixe. D'un point de vue pratique, nous commençons par étendre A et g à $\mathbb{R}^N$ tout entier.
Soit

$$X_R = \left\{ v \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{B(x_0,R)}) \text{ t.q. } v(x_0) = 0 \right\}$$

et

$$Y_R = \left\{ v \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{B(x_0,R)}) \text{ t.q. } v(x_0) = 0 \right\}$$

Il existe (et il est facile de construire) une application linéaire de prolongement $T: X_R \longrightarrow X_{2R}$ telle que $\operatorname{supp}(Tv) \subset B(x_0, 2R)$ quelle que soit $v \in X_R$, $Tv \in Y_{2R}$ quelle que soit $v \in Y_R$, $Tv_{|\overline{B(x_0,R)}} = v$ quelle que soit $v \in X_R$ et de plus

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X_R, X_{2R})} + \|T\|_{\mathcal{L}(Y_R, Y_{2R})} \leq C$$

avec C indépendante de R.
On note enfin par P l'application linéaire de $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{B(x_0, 2R)})$ dans Y_R définie par $Pu = u_{|\overline{B(x_0,R)}} - u(x_0)$.
Clairement $P \circ T(v) = v$ quel que soit $v \in Y_R$.
Nous allons résoudre le problème de point fixe

$$u = Lu + f \tag{21}$$

où

$$Lu = P\big(E_N * \mathrm{div}\big(T(Id - A(x)) \cdot \nabla(Tu)\big)\big)$$

et

$$f = P(E_N * \mathrm{div}(Tg)).$$

Puisque $Id - A(x) \in X_R$ et que X_R est une algèbre, il suit de la Proposition II.1 que

$$L : Y_R \longrightarrow Y_R,$$

et que

$$f \in Y_R.$$

De plus, pour $u \in Y_R$ on a, en vertu de (7),

$$\|Lu\|_{Y_R} \leq C_N \left|\nabla E_N * \mathrm{div}\big(T(Id - A(x)) \cdot \nabla(Tu)\big)\right|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq C_N \left|T(Id - A(x)) \cdot \nabla(Tu)\right|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq C_N \left(|T(Id - A(x))|_{L^\infty} \cdot |\nabla(Tu)|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} + |T(Id - A(x))|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \cdot |\nabla(Tu)|_{L^\infty} \right)$$

$$\leq C_N \cdot R^\alpha \left(\|A(x)\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{B(x_0,R)})} + 1 \right) \cdot \|u\|_{Y_R}$$

$$\leq C_N \, \eta \, \|u\|_{Y_R} \leq \frac{1}{2} \|u\|_{Y_R}$$

si $\eta = \dfrac{1}{2 C_N}$.

Puisque $\|L\| \leq 1/2 < 1$, l'équation (21) possède une unique solution $u \in Y_R$ et

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{B(x_0,R)})} \leq 2 \|f\|_{Y_R} \leq C \|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{B(x_0,R)})}$$

Il reste à vérifier que u est solution de (9). Pour $\varphi \in \mathcal{D}(B(x_0,R))$, on a

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle u, \Delta \varphi \rangle = \langle Lu + f, \Delta \varphi \rangle$$

$$= \langle E_N * (\operatorname{div}(T(Id - A(x)) \nabla(Tu) + Tg)), \Delta\varphi \rangle$$

car $\operatorname{supp}(\Delta\varphi) \subset B(x_0,R)$

$$= \langle \operatorname{div}(T(Id - A(x)) \cdot \nabla(Tu) + Tg), \varphi \rangle$$

$$= - \langle T(Id - A(x)) \nabla(Tu) + Tg, \nabla\varphi \rangle$$

$$= - \langle (Id - A(x)) \nabla u + g, \nabla \varphi \rangle \quad \text{car } \operatorname{supp}(\nabla\varphi) \subset B(x_0,R)$$

$$= \langle \operatorname{div}((Id - A(x)) \nabla u) + \operatorname{div} g, \varphi \rangle$$

ce qui termine la démonstration ∎

De la même manière, on démontre la

<u>Proposition IV. 2</u> On suppose que $g \in L^p(\Omega)$, $1<p<+\infty$. Il existe un constante η ne dépendant que de p et N telle que si

$$|A|_{\mathcal{C}^{0,0}(\Omega)} \leq \eta \tag{22}$$

alors il existe une solution de (9) sur Ω qui appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ et qui vérifie l'estimation

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^p(\Omega)} \tag{23}$$

où C ne dépend que de N, p et Ω.

La preuve est similaire à celle de la proposition précédente, il n'y a toutefois plus de besoin d'étendre les fonctions et on remplace la condition $u(x_0)=0$ par une condition d'intégrale nulle. Les détails sont laissés aux soins du lecteur.

V Régularité des solutions faibles à coefficients Höldériens

Le but premier de cette section est de démontrer la proposition suivante :

Proposition V.1 Soit $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de l'équation

$$\mathrm{div}\,(A(x)\,\nabla u) = 0 \qquad \text{sur } \Omega$$

où $A \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ répond aux conditions d'ellipticité de la section II. Alors $u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ et pour tout compact $K \subset \Omega$ on a l'estimation

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(K)} \leq C\,\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

où C ne dépend que de K et $\|A\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$.

Remarque Nous déduisons la régularité des solutions faibles de problèmes non homogènes en combinant la Proposition V.1 avec les résultats de la section IV.

La démonstration de la Proposition V.1 repose sur l'approximation de u par des fonctions harmoniques et sur les estimations que nous connaissons pour celles-ci.

Nous commençons par le

<u>Lemme V.2</u> Soit u une fonction harmonique sur $B(x,R)$, telle que $u \in L^2(B(x,R))$, alors pour $0 < \rho < r \leq R$ on a

a) $$\int_{B(x,\rho)} |u|^2 \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^N \int_{B(x,r)} |u|^2 ,$$

b) $$\int_{B(x,\rho)} |u - \bar{u}_{x,\rho}|^2 \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+2} \int_{B(x,r)} |u - \bar{u}_{x,r}|^2 ,$$

où C ne dépend que de N.

<u>Preuve du Lemme V.2</u> Remarquons d'abord que les quantités $\frac{1}{\tau^N} \int_{B(x,\tau)} |u|^2$ (resp. $\frac{1}{\tau^{N+2}} \int_{B(x,\tau)} |u - \bar{u}_{x,\tau}|^2$) sont invariantes par les transformations $\tau \to \lambda\tau$, $u(y) \to u_\lambda(y) = u\left(x + \frac{y-x}{\lambda}\right)$ (resp $\tau \to \lambda\tau$, $u(y) \to u_\lambda(y) = \lambda^{-1} u\left(x + \frac{y-x}{\lambda}\right)$), de même que le fait d'être harmonique. Il suffit donc de considérer le cas $r = 1$. On peut également supposer que $\rho \leq 1/2$, car pour $1/2 \leq \rho < 1$ et $r = 1$, a) et b) sont vérifiées avec $C = 2^{N+2}$.

Pour a), nous savons par le Théorème I.4 que sur $B(x, 1/2)$ nous avons

$$|u(y)|^2 \leq C \int_{B(x,1)} |u|^2 \qquad \forall y \in B(x, 1/2)$$

On obtient alors a) en intégrant l'inégalité précédente sur $B(x,\rho)$.
Pour montrer b), notons $\hat{u}$ la fonction $u - \overline{u}_{x,1}$.
Puisque $\hat{u}$ est encore harmonique, le Théorème I.4 nous assure que

$$|\nabla \hat{u}(y)|^2 \leq C \int_{B(x,1)} |\hat{u}|^2 = C \int_{B(x,1)} |u - \overline{u}_{x,1}|^2$$

quel que soit $y \in B(x, 1/2)$.
Nous obtenons alors, pour $\rho \leq 1/2$,

$$\int_{B(x,\rho)} |\hat{u}(y) - \overline{\hat{u}}_{x,\rho}|^2 dy \leq \int_{B(x,\rho)} |\hat{u}(y) - \hat{u}(x)|^2 dy$$

$$\leq C \rho^{N+2} \sup_{y \in B(x,1/2)} |\nabla \hat{u}(y)|$$

$$\leq C \rho^{N+2} \int_{B(x,1)} |u - \overline{u}_{x,1}|^2 ,$$

ce qui termine la démonstration. ∎

Lorsque u n'est pas harmonique, on la compare à son approximation harmonique comme suit :

<u>Lemme V.3</u> Soit $u, v \in L^2(B(x,r))$ et supposons que v soit harmonique sur $B(x,r)$. Alors pour $0 < \rho \leq r$ on a

a) $$\int_{B(x,\rho)} |u|^2 \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^N \int_{B(x,r)} |u|^2 + C\int_{B(x,r)} |u-v|^2$$

b) $$\int_{B(x,\rho)} |u-\bar{u}_{x,\rho}|^2 \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+2} \int_{B(x,r)} |u-\bar{u}_{x,r}|^2 + C\int_{B(x,r)} |u-v|^2$$

où la constante C ne dépend que de N.

<u>Preuve du lemme V.3</u> Elle découle de manière assez directe de l'inégalité du triangle : on a

$$\int_{B(x,\rho)} |u|^2 \leq \int_{B(x,\rho)} |v|^2 + \int_{B(x,\rho)} |u-v|^2$$

$$\leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^N \int_{B(x,r)} |v|^2 + \int_{B(x,\rho)} |u-v|^2 \quad \text{car } v \text{ harmonique}$$

$$\leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^N \int_{B(x,r)} |u|^2 + \left(1+C\left(\frac{\rho}{r}\right)^N\right)\int_{B(x,r)} |u-v|^2,$$

ce qui montre a), et pour b),

$$\int_{B(x,\rho)} |u-\bar{u}_{x,\rho}|^2 \leq \int_{B(x,\rho)} |v-\bar{v}_{x,\rho}|^2 + \int_{B(x,\rho)} |(u-v)-(\bar{u}_{x,\rho}-\bar{v}_{x,\rho})|^2$$

$$\leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+2} \int_{B(x,r)} |v-\bar{v}_{x,r}|^2 + \int_{B(x,\rho)} |u-v|^2$$

$$\leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+2} \int_{B(x,r)} |u-\bar{u}_{x,r}|^2 + C\int_{B(x,r)} |u-v|^2 .$$

$\blacksquare$

Le lemme V.3 fait apparaître des quantités du type

$$I(\rho) = \int_{B(x,\rho)} |u - \bar{u}_{x,\rho}|^2 .$$

Il est clair que si $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ alors $I(\rho)$ se comporte comme $\rho^{N+2\alpha}$ lorsque ρ tend vers 0. Le lemme suivant, dû à Campanato, affirme la réciproque.

<u>Lemme V.4 (Campanato)</u> Soit $u \in L^2(\Omega)$ t.q.

$$\sup_{\substack{x \in \Omega \\ B(x,\rho) \subset \Omega}} \rho^{-N-2\alpha} \int_{B(x,\rho)} |u - \bar{u}_{x,\rho}|^2 < +\infty ,$$

où $0 < \alpha < 1$, alors $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$.

<u>Preuve du Lemme V.4</u> Soit $x \in \Omega$ et $0 < \frac{r}{2} \leq \rho \leq r$ tels que $B(x,r) \subset \Omega$. On a

$$|u_{x,r} - u_{x,\rho}|^2 = \fint_{B(x,\rho)} |u_{x,r} - u_{x,\rho}|^2$$

$$\leq \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{x,\rho}|^2 + \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{x,r}|^2$$

$$\leq \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{x,\rho}|^2 + 2^N \fint_{B(x,r)} |u - u_{x,r}|^2$$

$$\leq C \rho^{2\alpha} + C 2^N r^{2\alpha}$$

$$\leq C r^{2\alpha}$$

Dès lors, si $x \in \Omega$ et $0 < \rho < r$ sont tels que $B(x,r) \subset \Omega$ et si on note k l'unique entier pour lequel $2^k \rho < r \leq 2^{k+1}\rho$, alors par l'étape précédente on obtient

$$\begin{aligned}
|\overline{u_{x,\rho}} - \overline{u_{x,r}}| &\leq \left(\sum_{j=0}^{k-1} |u_{x,2^j\rho} - u_{x,2^{j+1}\rho}|\right) + |u_{x,2^k\rho} - u_{x,r}| \\
&\leq C \sum_{j=0}^{k-1} (2^\alpha)^{j+1} \cdot \rho^\alpha + C r^\alpha \\
&\leq C r^\alpha \left(1 + \sum_{j=0}^{k-1} (2^\alpha)^{j+1-k}\right) \\
&= C r^\alpha \left(1 + \sum_{l=0}^{k-1} (2^\alpha)^{-l}\right) \\
&\leq C r^\alpha \left(1 - \frac{1}{1-2^\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Si $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs telle que $r_k \to 0$ qd $k \to +\infty$, l'inégalité précédente montre que la suite des fonctions $x \longmapsto \overline{u_{x,r_k}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}(K)$ quel que soit le compact $K \subset \Omega$. Puisque les fonctions $x \mapsto u_{x,r_k}$ convergent ponctuellement presque partout vers u par le théorème de dérivation de Lebesgue, on en déduit que $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Si maintenant $x, y \in \Omega$, on a, pour $r = |x-y|$, et si $B(x,2r) \subset \Omega$,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - \overline{u_{x,2r}}| + |\overline{u_{x,2r}} - \overline{u_{y,r}}| \\
&\quad + |u(y) - \overline{u_{y,r}}| \\
&\leq C r^\alpha + |\overline{u_{x,2r}} - \overline{u_{y,r}}| .
\end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi comme précédemment

$$\left|\overline{u}_{x,2r}-\overline{u}_{y,r}\right|^2 \leq \fint_{B(y,r)} |u-\overline{u}_{x,2r}|^2 + \fint_{B(y,r)} |u-\overline{u}_{y,r}|^2$$

$$\leq C\fint_{B(x,2r)} |u-\overline{u}_{x,2r}|^2 + \fint_{B(y,r)} |u-\overline{u}_{y,r}|^2$$

$$\leq C r^{2\alpha}.$$

On obtient finalement, pour $B(x,2r)\subset\Omega$,

$$|u(x)-u(y)| \leq C r^\alpha = C|x-y|^\alpha,$$

d'où il suit que $u\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)$. ■

<u>Remarque</u> Pour $0<\lambda<N+2$, et $u\in L^2$, on note

$$\|u\|^2_{L^{2,\lambda}} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ B(x,r)\subset\Omega}} \rho^{-\lambda}\int_{B(x,r)} |u-\overline{u}_{x,r}|^2$$

et $L^{2,\lambda}(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \|u\|_{L^{2,\lambda}}<+\infty\}$.

1) Pour $N<\lambda<N+2$, le Lemme de Campanato montre que $L^{2,\lambda}\simeq\mathcal{C}^{0,\alpha}$ où $\alpha=\frac{\lambda-N}{2}$ (attention toutefois aux problèmes du bord).
2) Pour $0<\lambda<N$, on ne peut pas déduire, du fait que $u\in L^{2,\lambda}$, une meilleure intégrabilité de u : $\forall\varepsilon>0\ \exists u\in L^{2,\lambda}$ t.q. $u\notin L^{2+\varepsilon}_{loc}$ (à faire en exercice).
3) Pour $\lambda=N$, $L^{2,N}=BMO$ (bounded mean oscillation) et un résultat de John et Nirenberg

montre que $u \in L^p_{loc}$ $\forall p < +\infty$, et même que

<u>Lemme V.4b</u> (John - Nirenberg)

Si $u \in L^1(\Omega)$ est telle que

$$\sup_{B(x,r) \subset \Omega} \fint_{B(x,r)} |u - \bar{u}_{x,r}| \leq M,$$

alors

$$\sup_{B(x,r) \subset \Omega} \fint_{B(x,r)} e^{\frac{\gamma}{M}|u - \bar{u}_{x,r}|} \leq C,$$

où γ et C ne dépendent que de N.

<u>Remarque</u> : il suit de l'inégalité de Hölder que quel que soit $p \geq 1$,

$$\sup_{B(x,r) \subset \Omega} \fint_{B(x,r)} |u - \bar{u}_{x,r}| \leq \sup_{B(x,r) \subset \Omega} \left(\fint |u - \bar{u}_{x,r}|^p \right)^{1/p}.$$

Le lemme de John - Nirenberg permet de renverser ces inégalités (modulo une constante multiplicative), et même mieux.

<u>Preuve du Lemme V.4b</u>

Soit $u \in L^1(\Omega)$, quitte à diviser u par une constante on peut supposer que $M \leq 1$, et même que pour tout cube $\mathcal{C}$ contenu dans une boule dans Ω

$$\fint_{C} |u - \bar{u}_{\mathcal{C}}| \leq 1.$$

Soit $B(x,r) \subset \Omega$.

Soit $\alpha > 1$ fixé, on applique la décomposition de Calderon - Zygmund au niveau α à la fonction $|u - \bar{u}_{x,r}|$ (prolongée par 0 en dehors de $B(x,r)$).

On note $(\mathcal{C}_i^1)$ la famille de cubes ainsi obtenus, et on a

- $|u - \bar{u}_{x,r}| \leq \alpha$ p.p. sur $B(x,r) \setminus \bigcup_i \mathcal{C}_i^1$
- $\alpha \leq \fint_{\mathcal{C}_i^1} |u - \bar{u}_{x,r}| \leq 2^N \alpha \quad \forall i$

En particulier,

- $\sum_i |\mathcal{C}_i^1| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{B(x,r)} |u - \bar{u}_{x,r}| \leq \frac{1}{\alpha} |B(x,r)|$,
- $|\bar{u}_{\mathcal{C}_i^1} - \bar{u}_{x,r}| \leq \fint_{\mathcal{C}_i^1} |u - \bar{u}_{x,r}| \leq 2^N \alpha \quad \forall i$.

On applique ensuite la décomposition de Calderon - Zygmund à $|u - \bar{u}_{\mathcal{C}_i^1}|$ sur chaque $\mathcal{C}_i^1$.

On obtient ainsi, après regroupement, une famille de cubes $\mathcal{C}_i^2$ telle que

$$\sum_i |\mathcal{C}_i^2| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_i \int_{\mathcal{C}_i^1} |u - \bar{u}_{\mathcal{C}_i^1}|$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \sum_i |\mathcal{C}_i^1|$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^2} |B(x,r)|,$$

et $$|u - \bar{u}_{\mathcal{C}_i^1}| \leq \alpha \text{ p.p. sur } \mathcal{C}_i^1 \setminus \bigcup_j \mathcal{C}_j^2, \ \forall i.$$

En particulier, pour $y \in B(x,r) \setminus \bigcup \mathcal{C}_i^2$ on a

$$|u(y) - \overline{u}_{x,r}| \leq \alpha + 2^N \alpha \leq 2 . 2^N \alpha,$$

et de plus

$$|\overline{u}_{\mathcal{C}_i^1} - \overline{u}_{\mathcal{C}_j^2}| \leq 2^N \alpha \quad \forall i \text{ et } \forall_j \text{ dans la descendance de } i.$$

On construit ainsi de manière récurrente des familles emboitées de cubes $(\mathcal{C}_i^k)$ telles que

$$\begin{cases} \sum_i |\mathcal{C}_i^k| \leq \alpha^{-k} |B(x,r)| \\ |u(y) - \overline{u}_{x,r}| \leq k . 2^N \alpha \quad \forall y \in B(x,r) \setminus \bigcup_i \mathcal{C}_i^k. \end{cases}$$

Soit $t > 0$ qcq, et k l'unique entier pour lequel

$$k 2^N \alpha \leq t < (k+1) 2^N \alpha.$$

On a

$$\{ |u - \overline{u}_{x,r}| > t \} \subseteq \bigcup_i \mathcal{C}_i^k,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} |\{ |u - \overline{u}_{x,r}\} > t \}| &\leq \sum_i |\mathcal{C}_i^k| \\ &\leq \alpha^{-k} |B(x,r)| \\ &\leq \alpha^{-\frac{t}{2^{N+1}\alpha}} |B(x,r)| \\ &\leq e^{-(2^{-N-1} \alpha^{-1} \log \alpha) t} . |B(x,r)| \end{aligned}$$

Dès lors, par la formule des tranches on a

$$\fint_{B(x,r)} e^{\gamma|u-\bar{u}_{x,r}|} = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\left(1+\int_0^{\gamma|u(x)-\bar{u}_{x,r}|} e^t\,dt\right)dx$$

$$\leq 1+\frac{1}{|B(x,r)|}\int_0^\infty e^t \left|\left\{|u-\bar{u}_{x,r}|>\frac{t}{\gamma}\right\}\right| dt$$

$$\leq 1+\int_0^\infty e^t \cdot e^{-2^{-N-1}\alpha^{-1}\log\alpha\,\gamma^{-1}t}\,dt.$$

Il suffit donc de choisir γ pour que

$$\gamma < 2^{-N-1}\alpha^{-1}\log\alpha$$

pour un certain $\alpha > 1$. Ceci termine la démonstration ∎

Une conséquence facile du lemme de Campanato est le

Corollaire V.5 (Morrey) Si $u \in H^1(\Omega)$ est tel que

$$\sup_{\substack{x \in \Omega \\ B(x,\rho) \subset \Omega}} \rho^{-(N-2)-2\alpha} \int_{B(x,\rho)} |Du|^2 < +\infty, \quad 0<\alpha<1,$$

alors $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$.

Preuve du corollaire V.5 Par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger on a

$$\int_{B(x,\rho)} |u - \overline{u}_{x,\rho}|^2 \le \rho^2 \int_{B(x,\rho)} |Du|^2 ,$$

et la conclusion suit du lemme de Campanato.

Remarque On déduit aisément le théorème d'injection de Sobolev $W^{1,p} \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}$ pour $p > N$ et $\alpha = \frac{p-N}{p}$ du résultat de Morrey, il suffit en effet d'estimer $\int |Du|^2$ à l'aide de l'inégalité de Hölder.

Nous pouvons maintenant aborder la preuve de la Proposition V.1

Preuve de la Proposition V.1

Soit $x \in \Omega$ et $r > 0$ t.q. $B(x,r) \subset \Omega$.
Soit v l'unique fonction harmonique sur $B(x,r)$ telle que $u - v \in H^1_0(B(x,r))$.
Par le lemme V.3 a) appliqué à ∇u et ∇v, on a, pour $0 < \rho \leq r$,

$$(1) \quad \int_{B(x,\rho)} |\nabla u|^2 \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^N \int_{B(x,r)} |\nabla u|^2 + \int_{B(x,r)} |\nabla u - \nabla v|^2 .$$

Remarque qu'en vertu des équations vérifiées par u et v, et puisque $u - v \in H^1_0(B(x,r))$, on a

$$\int_{B(x,r)} \nabla v (\nabla u - \nabla v) = 0$$

$$\int_{B(x,r)} A(y) \nabla u (\nabla u - \nabla v) = 0 ,$$

de sorte que (sans perte de généralité on suppose $A(x) = Id$)

$$\int_{B(x,r)} |\nabla u - \nabla v|^2 = \int_{B(x,r)} (A(x) - I) \nabla u (\nabla u - \nabla v)$$

$$\leq \|A(x) - I\|_{L^\infty(B(x,r))} \|\nabla u\|_{L^2(B(x,r))} \|\nabla u - \nabla v\|_{L^2}$$

et donc

$$(2) \quad \int_{B(x,r)} |\nabla u - \nabla v|^2 \leq C r^{2\alpha} \int_{B(x,r)} |\nabla u|^2 .$$

Soit $0 < \lambda < N$ et $\phi_\lambda(\rho) = \rho^{-\lambda} \int_{B(x,\rho)} |\nabla u|^2$.

On déduit de 1) et 2) que pour $\rho = \theta r$ avec $0 < \theta < 1$,

$$\phi_\lambda(\theta r) \leq C.(\theta^{N-\lambda} + r^{2\alpha})\, \phi_\lambda(r).$$

On peut donc, pour λ fixé, choisir θ suffisamment petit et r_0 suffisamment petit pour que

$$\phi_\lambda(\theta r) \leq \phi_\lambda(r) \quad \text{dès que } r \leq r_0.$$

En particulier, on déduit que

$$(3) \qquad \rho^{-\lambda} \int_{B(x,\rho)} |Du|^2 \leq C_\lambda \qquad \forall\, 0 < \rho \leq r_0.$$

On utilise maintenant le lemme V.3 b), ce qui nous donne de la même manière

$$\int_{B(x,\rho)} |\nabla u - \overline{\nabla u}_{x,\rho}|^2 \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+2} \int_{B(x,r)} |\nabla u - \overline{\nabla u}_{x,r}|^2 + C \int_{B(x,r)} |\nabla u - \nabla v|^2$$

$$(4) \qquad \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+2} \int_{B(x,r)} |\nabla u - \overline{\nabla u}_{x,r}|^2 + C_\lambda r^{\lambda+2\alpha},$$

où l'on a utilisé (3) dans la dernière inégalité. On pose alors

$$\Phi_\lambda(\rho) = \rho^{-\lambda-2\alpha} \int_{B(x,\rho)} |\nabla u - \overline{\nabla u}_{x,\rho}|^2$$

de sorte que

$$\overline{\Phi}_\lambda(\theta\rho) \leq C\,\theta^{N+2-\lambda-2\alpha}\,\overline{\Phi}_\lambda(r) + C_{\lambda,\theta}$$

quels que soient $0<\theta<1$ et $r \leq r_0$. On choisit alors θ pour que $C\,\theta^{N+2-\lambda-2\alpha} = 1/2$ et on déduit que

$$\rho^{-\lambda-2\alpha}\int_{B(x,\rho)} |\nabla u - \overline{\nabla u}_{x,\rho}|^2 \leq C_\lambda$$

pour $0<\rho\leq r_0$. Pour $\lambda > N-2\alpha$, le lemme de Campanato nous assure alors que $\nabla u \in \mathcal{C}^{0,\beta}_{loc}$ pour $\beta = \dfrac{\lambda+2\alpha-N}{2}$.

Comme $\nabla u \in L^\infty$, on améliore alors (3) en

$$\rho^{-N}\int_{B(x,\rho)} |Du|^2 \leq C\,,$$

d'où le même raisonnement que ci-dessus nous mène à la conclusion $\nabla u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{loc}$, et donc $u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$, avec l'estimation

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(K)} \leq C\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\,.$$

VI Inégalité de Caccioppoli et méthode des différences finies de Nirenberg

Dans cette section, on s'intéresse aux solution H^1_{loc} de l'équation

$$(24) \qquad \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \operatorname{div} g \quad \text{sur } \Omega$$

où $A(x) = (a_{ij}(x))_{\substack{1\le i\le N\\ 1\le j\le N}}$ est une matrice symétrique à coefficients mesurables qui vérifient la condition uniforme d'ellipticité

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

pour des constantes $0 < \lambda \le \Lambda$ ne dépendant pas de x.

On montrera d'abord le

Lemme VI.1 (Inégalité de Caccioppoli)

Si $u \in H^1(B(x_0,R))$ vérifie (24) avec $g \in L^2(B(x_0,R))$, alors pour tout $0 < r < R$ on a

$$(25) \quad \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 \le C\left(1+\frac{1}{(R-r)^2}\right)\left(\int_{B(x_0,R)} |u|^2 + \int_{B(x_0,R)} |g|^2\right),$$

où C ne dépend que de N, λ et Λ

Preuve du Lemme VI.1

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ une fonction plateau pour $B(x_0,r)$ dans $B(x_0,R)$, telle que $|\nabla\chi|_{L^\infty} \le \frac{C}{R-r}$.

En testant l'égalité (24) au moyen de la fonction $\chi^2 u \in H_0^1(B(x_0,R))$ on obtient

$$\int_{B(x_0,R)} (A(x)\nabla u - g)\nabla(\chi^2 u) = 0 ,$$

ou encore

$$\int_{B(x_0,R)} \chi^2 A(x)\nabla u \nabla u = -2\int_{B(x_0,R)} (A(x)\nabla u - g)\,\chi \nabla \chi u + \int_{B(x_0,R)} \chi^2 g \nabla u .$$

D'une part,

$$\left| \int_{B(x_0,R)} \chi^2 g \nabla u \right| \leq \left(\int_{B(x_0,R)} \chi^2 |g|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{B(x_0,R)} \chi^2 |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{\lambda}{3} \int_{B(x_0,R)} \chi^2 |\nabla u|^2 + \frac{C}{\lambda} \int_{B(x_0,R)} |g|^2 ,$$

et d'autre part

$$\left| 2\int_{B(x_0,R)} (A(x)\nabla u - g)\,\chi \nabla \chi u \right| \leq 2 \left(\int_{B(x_0,R)} \chi^2 |A(x)\nabla u - g|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{B(x_0,R)} |\nabla \chi|^2 |u|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq 2\Lambda \left(\int_{B(x_0,R)} (\chi^2 |\nabla u|^2 + |g|^2) \right)^{1/2} \left(\int |\nabla \chi|^2 |u|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{\lambda}{3} \int_{B(x_0,R)} \chi^2 |\nabla u|^2 + \frac{C\Lambda^2}{\lambda} \frac{1}{(R-r)^2} \int_{B(x_0,R)} (|u|^2 + |g|^2).$$

On en déduit, puisque

$$\int_{B(x_0,R)} \chi^2 A(x) \nabla u \nabla u \geq \lambda \int_{B(x_0,R)} \chi^2 |\nabla u|^2 ,$$

que

$$\int_{B(x_0,R)} \chi^2 |\nabla u|^2 \leq C\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}\right) \int_{B(x_0,R)} |u|^2 + |g|^2$$

et la conclusion suit. ∎

<u>Remarque</u> Nous verrons plus en avant dans le cours que l'inégalité de Caccioppoli s'étend aux fonctions convexes de u ; il s'agit d'une constatation due à Moser qui sera bien utile pour aborder les inégalités dites de Harnack.

La méthode des différences finies de Nirenberg permet, sous certaines hypothèses, de gagner un cran de régularité faible pour ∇u sans avoir à dériver l'équation (24). Elle repose sur le lemme suivant sur les espaces de Sobolev, dont on trouvera la preuve par exemple dans Brezis, Analyse fonctionnelle.

<u>Lemme VI.2</u> Si $u \in L^2(\Omega)$ et si pour $1 \leq i \leq N$

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_K |u(x+\varepsilon e_i) - u(x)|^2\right)^{1/2} \leq C$$

pour un compact $K \subset \Omega$ alors $u \in H^1(K)$ et $\|\nabla u\|_{L^2(K)} \leq C$.

(on peut remplacer l'exposant 2 par n'importe quel exposant $1 < p < +\infty$).

On a alors la

<u>Proposition VI. 3</u> Si $u \in H^1(\Omega)$ est solution de (24) avec $A \in Lip(\Omega)$ et $g \in H^1(\Omega)$ alors $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ et quel que soit le compact $K \subset \Omega$ on a l'estimation

$$(26) \qquad \|u\|_{H^2(K)} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}\right),$$

où C ne dépend que de N, K et $\|A\|_{Lip}$.

<u>Preuve de la Proposition VI. 3</u>

Pour $i = 1, \dots, N$ et $\varepsilon > 0$, on pose

$$\delta u_{\varepsilon,i} = \frac{1}{\varepsilon}\, u(x + \varepsilon e_i) - u(x) .$$

Puisque u vérifie (24), on a, pour $\delta u_{\varepsilon,i}$,

$$\operatorname{div}\left(A(x)\nabla \delta u_{\varepsilon,i}\right) = \operatorname{div}\left(\delta g_{\varepsilon,i}\right) - \operatorname{div}\left(\delta A_{\varepsilon,i}(x)\nabla u(x+\varepsilon e_i)\right)$$

localement à l'intérieur de Ω.
On déduit de l'inégalité de Caccioppoli pour $\delta u_{\varepsilon,i}$ que quel que soit $K \subset \Omega' \subset\subset \Omega$

$$\|\delta \nabla u_{\varepsilon,i}\|_{L^2(K)} = \|\nabla \delta u_{\varepsilon,i}\|_{L^2(K)}$$

$$\leq C\left(\|\delta g_{\varepsilon,i}\|_{L^2(\Omega')} + \|\delta A_{\varepsilon,i}\|_{L^\infty(\Omega')} \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega')}\right)$$

$$\leq C\left(\|g\|_{H^1(\Omega)} + \|A\|_{Lip(\Omega)}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right)\right)$$

La conclusion suit alors du Lemme VI. 2 ∎

A ce stade, nous pouvons combiner la Proposition IV. 1, la Proposition V. 1 et la Proposition VI. 3 pour obtenir le

Théorème VI. 4 Si $u \in H^1(\Omega)$ est solution faible de l'équation

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \operatorname{div} g$$

avec $g \in \mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega)$ et $A \in \mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, satisfaisant à la condition uniforme d'elliptcité, alors $u \in \mathcal{C}^{m+1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ et quel que le compact $K \subset \Omega$ on a un estimation

$$(27) \quad \|u\|_{\mathcal{C}^{m+1,\alpha}(K)} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{\mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega)}\right),$$

où C ne dépend que de N, K et A.

Preuve du Théorème VI. 4

On procède par récurrence sur m, en commençant par le cas $m = 0$.

Par la Proposition IV. 1, au voisinage de chaque point x de Ω on peut construire une solution v^x de (24) avec l'estimation

$$\|v^x\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(B(x,\rho))} \leq C\|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)}$$

pour un certain $\rho > 0$. La fonction $w = u - v^x$ vérifie l'équation $\operatorname{div}(A\nabla w) = 0$ sur $B(x,\rho)$, de sorte que par la Proposition V. 1 on obtient

$$\|w\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(B(x,\rho/2))} \leq C\|u - v^x\|_{H^1(B(x,\rho))},$$

et ainsi

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(B(x,\rho/2))} \leq C\left(\|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{H^1(B(x,\rho))}\right).$$

Un argument de recouvrement et l'inégalité de Caccioppoli assurent alors que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(K)} \leq C\left(\|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

ce qui finit de prouver (27) pour $m = 0$.
Notons par ailleurs que la Proposition VI.3 nous assure que $Du \in H^1_{loc}(\Omega)$.
Par récurrence, supposons avoir démontrer que (27) est vérifiée jusqu'à l'ordre $k < m$. En dérivant (26) dans une direction i quelconque on obtient

$$(28) \quad \operatorname{div}\left(A(x)\nabla \partial_i u\right) = \operatorname{div}\left(\partial_i g - \partial_i A . Du\right).$$

Par hypothèse de récurrence $Du \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{loc}$, et par hypothèse, puisque $k < m$, $\partial_i g \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{loc}$, $\partial_i A \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{loc}$. Comme $\partial_i u \in H^1_{loc}$, on déduit de l'hyp. de récurrence que $\partial_i u \in \mathcal{C}^{k+1,\alpha}_{loc}$ (avec estimée), c'est-à-dire, puisque i est quelconque, que $u \in \mathcal{C}^{k+2,\alpha}_{loc}$.
Ceci termine la démonstration.

<u>Remarque</u> D'une certaine manière, le théorème VI.4 est le meilleur auquel on puisse s'attendre dans le cadre des coefficients höldériens (penser au cas $N=1$). Dans la section suivante, nous verrons ce qu'il en est si A est seulement mesurable.

VII Théorie de de Giorgi - Nash - Moser

Dans cette section importante, nous nous attacherons à démontrer la régularité des solutions faible de l'équation

$$\text{(29)} \qquad \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = 0$$

où A est une matrice symétrique à coefficients mesurables vérifiant la condition uniforme d'ellipticité

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

où $0 < \lambda \leq \Lambda$ sont indépendantes de x.

Si A est seulement dans L^∞, on ne peut espérer que u soit mieux que lipschitzienne, comme le cas $N=1$ le montre. Nous montrerons que u est höldérienne, i.e. $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{loc}$, pour un exposant α qui dépend en général de N et $\frac{\Lambda}{\lambda}$.

Ce résultat, qui remonte à la fin des années cinquante, a été démontré par de Giorgi et Nash indépendemment (en réalité Nash a traité le cas parabolique et non le cas elliptique mais la philosophie est la même). Moser en a donné une démonstration alternative, que nous reprendrons ici, et l'a étendu par une inégalité de type Harnack. Ces résultats ont permis de boucher le trou qui subsistait à l'époque entre les conditions suffisantes à l'analyticité des solutions d'équations non linéaires importantes (comme celle des surface minimales) et la régularité à priori des solutions que l'on parvenait à construire.

Les preuves de de Giorgi et de Moser reposent de manière essentielle sur l'inégalité de Caccioppoli déjà évoquée à la section précédente, et sur ses extensions.

<u>Définition</u> Soit $u \in H^1(\Omega)$. On dit que u est une sous-solution de (29) sur Ω si

$$(30) \qquad \int_\Omega A(x) \nabla u \nabla \phi \leq 0$$

quel que soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$ pp sur Ω.

Une remarque fondamentale est que l'inégalité de Caccioppoli s'étend aux sous-solutions :

<u>Proposition VII.1</u> Soit $u \in H^1(\Omega)$ sous-solution positive de (29), alors quel que soit $K \subset \Omega$ compact on a l'estimation

$$\int_K |\nabla u|^2 \leq C_K \int_\Omega |u|^2 .$$

Si de plus $\Omega = B(x_0, R)$ et $K = B(x_0, r)$ avec $0<r<R$

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 \leq \frac{C}{(R-r)^2} \int_{B(x_0,R)} |u|^2$$

Preuve de la Proposition VII.1

Le cheminement est identique à celui de la preuve du Lemme VI.1, on utilise de manière essentielle la positivité de u pour pouvoir utiliser $\chi^2 u$ comme fonction test dans (30). Le détail de la preuve est laissé au lecteur ∎

Le second ingrédient important de cette section est la remarque suivante de Moser

Proposition VII.2 Soit $u \in H^1(\Omega)$ une sous-solution de (29). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et positive. On pose $v = f(u)$ et on suppose que $v \in L^2(\Omega)$.
Si

f est croissante sur $\mathbb{R}$

ou si

u est une solution de (29) sur Ω

alors

$v \in H^1_{loc}(\Omega)$, v est une sous-solution positive de (29), et on a l'estimation

$$(31) \qquad \int_K |\nabla v|^2 \leq C_K \int_\Omega v^2 \qquad \forall K \subset \Omega \text{ compact},$$

où $C_K = C(R-r)^{-2}$ si $\Omega = B(x_0, R)$ et $K = B(x_0, r)$.

Preuve de la Proposition VII.2

Supposons pour commencer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f'' = 0$ en dehors d'un grand intervalle.

Puisque $u \in H^1(\Omega)$ et f est lipschitzienne, $v = f(u) \in H^1(\Omega)$ et $\nabla v = f'(u) \nabla u$.
De la même manière, $f'(u)\varphi \in H^1_{loc}(\Omega)$ $\forall \varphi \in H^1_{loc}(\Omega)$ et $\nabla(f'(u)\varphi) = f''(u) \nabla u \varphi + f'(u) \nabla \varphi$.

Soit $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ positive, on a

$$\int_\Omega A(x) \nabla(f(u)) \nabla \varphi = \int_\Omega A(x) f'(u) \nabla u \nabla \varphi$$

$$= \int_\Omega A(x) \nabla u \nabla\Big(f'(u)\varphi\Big) - \int_\Omega A(x) \nabla u \nabla u\, f''(u)\, \varphi .$$

Puisque f est convexe et φ positive, on a

$$- \int_\Omega A(x) \nabla u \nabla u\, f''(u)\, \varphi \leq 0 .$$

D'autre part, si f est croissante sur $\mathbb{R}$ on a

$$\int_\Omega A(x) \nabla u \nabla \big(f'(u) \varphi \big) \leq 0,$$

car $f'(u)\varphi \in H^1_0(\Omega)$ est positive, et si u est solution de (29) on a par contre

$$\int_\Omega A(x) \nabla u \nabla \big(f'(u) \varphi \big) = 0 .$$

Dans les deux cas, on obtient au final

$$\int_\Omega A(x) \nabla(f(u)) \nabla \varphi \leq 0 \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega) \text{ positive}$$

ce qui montre, puisque l'on sait déjà que $v \in H^1(\Omega)$, que v est une sous solution positive de (29). L'inégalité (31) découle alors de l'inégalité de Caccioppoli pour v (Proposition VII.1)

Venons-en maintenant au cas général pour f. On commence par approcher f par une suite de fonctions convexes positives f_k telles que

1) $f_k \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f_k' \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f_k'' \equiv 0$ en dehors d'un intervalle, quel que soit k
2) $f_k \longrightarrow f$ ponctuellement qd $k \to +\infty$
3) $f_k \leq f$ quel que soit k
4) f_k croissante si f croissante

Puisque $f_k(u)$ converge ponctuellement vers $f(u)$ et que $0 \leq f_k(u) \leq f(u) \in L^2(\Omega)$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous assure que

$$(32) \qquad f_k(u) \xrightarrow{L^2(\Omega)} f(u).$$

La première étape appliquée à $f_k(u)$ nous assure d'autre part que

$$(33) \qquad \int_K |\nabla(f_k(u))|^2 \leq C_K \int_\Omega |f_k(u)|^2$$

quel que soit $K \subset \Omega$. On en déduit que $(f_k(u))_k$ est localement uniformément bornée dans H^1, et par conséquent on déduit de la convergence (32) que $f(u) \in H^1_{loc}(\Omega)$ et que

$$\int_K |\nabla f(u)|^2 \leq \liminf \int_K |\nabla f_k(u)|^2 \leq C_K \int_\Omega |f(u)|^2.$$

Enfin, puisque $f_k(u) \xrightarrow{H^1_{loc}} f(u)$ on a, pour $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, φ positive,

$$\int A(x)\nabla\big(f(u)\big)\nabla\varphi = \lim_k \int A(x)\nabla\big(f_k(u)\big)\nabla\varphi$$
$$\leq 0 ,$$

ce qui montre que $v = f(u)$ est une sous-solution de (29). La preuve est terminée ∎

Nous pouvons maintenant aborder la

<u>Proposition VII.2</u> Soit $u \in H^1(\Omega)$ une sous-solution de (29) sur Ω alors on a l'estimation

$$\|u^+\|_{L^\infty(K)} \leq C_K \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{1/2},$$

où C_K ne dépend que de K, N, λ et Λ.

<u>Preuve de la Proposition VII.2</u>

Soit $x_0 \in K$, $\delta > 0$ tel que $B(x_0, 2\delta) \subset \Omega$, on pose

$$K_j = B(x_0, (1+2^{-j})\delta) \quad , \; j \in \mathbb{N}.$$

Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit aussi

$$v_j = (u^+)^{\alpha^j},$$

où $\alpha = \frac{N}{N-2}$ si $N \geq 3$ et n'importe quel réel > 1 si $N \leq 2$. On a ainsi $v_j \geq 0$ et

$$v_{j+1} = (v_j)^\alpha .$$

Puisque $u \in H^1(\Omega)$, $u^+ \in H^1(\Omega)$ et la Proposition VII. 2 nous assure que

$$\int_{K_0} |\nabla u^+|^2 \leq C_\delta \int_\Omega |u|^2 .$$

On déduit alors de l'inégalité de Sobolev que

$$\left(\int_{K_0} (u^+)^{2\alpha}\right)^{1/\alpha} \leqslant C_\delta \left(\int_{K_0} |\nabla u^+|^2 + \int_{K_0} (u^+)^2\right)$$

$$\leqslant C_\delta \int_\Omega |u|^2 ,$$

autrement dit

(34) $$\|v_1\|^{2/\alpha}_{L^2(K_0)} \leqslant C_\delta \int_\Omega |u|^2 .$$

Supposons avoir prouvé pour un certain $j \geq 1$ que $v_j \in L^2(K_{j-1})$. Alors par la Proposition VII. 2 on déduit que v_j est une sous-solution de (29) et que

$$\int_{K_j} |\nabla v_j|^2 \leq C_\delta\, 2^j \int_{K_{j-1}} |v_j|^2 .$$

En particulier, il suit alors de l'inégalité de Sobolev que

$$\left(\int_{K_j} v_j^{2\alpha}\right)^{1/\alpha} \leq C_\delta \left(\int_{K_j} |\nabla v_j|^2 + \int_{K_j} |v_j|^2\right)$$

$$\leq C_\delta\, 2^j \int_{K_{j-1}} (v_j)^2 .$$

En d'autres termes,

$$\| v_{j+1} \|_{L^2(K_j)}^{2/\alpha} \leq C_\delta\, 2^j \, \| v_j \|_{L^2(K_{j-1})}^2$$

et donc

$$(35) \quad \| v_{j+1} \|_{L^2(K_j)}^{\alpha^{-(j+1)}} \leq \left(C_\delta\, 2^j \right)^{\alpha^{-(j+1)}} \| v_j \|_{L^2(K_{j-1})}^{\alpha^{-j}}$$

En combinant (34) et (35) on obtient

$$\| v_j \|_{L^2(B(x_0,\delta))}^{\alpha^{-j}} \leq C \prod_{k=0}^{j} \left(C_\delta\, 2^k \right)^{\alpha^{-k}} \| u \|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C_\delta \, \| u \|_{L^2(\Omega)}$$

car

$$\prod_{k=0}^{j} \left(C_\delta\, 2^k \right)^{\alpha^{-k}} = \exp\left(\sum_{k=0}^{j} \alpha^{-k} \left(\log C_\delta + k \log 2 \right) \right)$$

$$\leq \exp\left(C_\delta \sum_{k=0}^{\infty} k\, \alpha^{-k} \right)$$

$$< +\infty$$

Puisque

$$\| v_j \|_{L^2(B(x_0,\delta))}^{\alpha^{-j}} = \| u^+ \|_{L^{2\cdot\alpha^j}(B(x_0,\delta))} ,$$

la conclusion suit en faisant tendre j vers $+\infty$.

L'inégalité de Cacciopoli pour les fonctions convexes positives de sous-solutions s'étend à presque toutes les fonctions puissances (pour la partie positive), même lorsque celles-ci ne sont pas convexes.

Lemme VII.3 Soit $u \in H^1(\Omega)$, $u > 0$, solution de (29). Pour $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$, on pose $v = f(u) \equiv u^\sigma$, et on suppose que $v \in L^2(\Omega)$.
Alors quel que soit le compact $K \subset \Omega$ on a

(36) $$\int_K |\nabla v|^2 \leq C_K \left(\frac{2\sigma}{2\sigma - 1}\right)^2 \int_\Omega v^2 ,$$

où C_K ne dépend que de K, Ω, N, λ et Λ.

Remarque La constante $\left(\frac{2\sigma}{2\sigma-1}\right)$ diverge lorsque σ se rapproche de $1/2$. Il s'agit uniquement d'une limitation technique liée à notre méthode de démonstration. Nous verrons bientôt qu'une solution de (29) est Höldérienne et vérifie une inégalité de Harnack, ce qui permet de faire sauter la limitation $\sigma \neq 1/2$ dans le lemme VII.3 (bien qu'à ce stade le Lemme VII.3 sera sans plus beaucoup d'intérêt en tant que tel).

Preuve du Lemme VII.3 Nous commençons par supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $u \geq \varepsilon > 0$ sur Ω.

La proposition VII.2 nous assure que $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, et par conséquent puisque $u \geq \varepsilon$ on déduit que n'importe quelle puissance (positive ou négative) de u appartient à $H^1_{loc}(\Omega)$.

Nous exprimons le fait que

$$\int_\Omega A(x) \nabla u \nabla \varphi = 0$$

avec le choix particulier $\varphi = f(u) f'(u) X^2 = \sigma u^{2\sigma - 1} X^2$, où comme toujours X est une fonction plateau pour K dans Ω. Cela nous donne

$$2 \int A(x) \nabla u \, f(u) f'(u) X \nabla X + \int A(x) \nabla u \, f(u) f''(u) \nabla u \, X^2 + \int A(x) \nabla u \nabla u \, (f'(u))^2 X^2 = 0,$$

ou encore

$$\int (f(u) f''(u) + f'(u)^2) A(x) \nabla u \nabla u \, X^2 = -2 \int A(x) \nabla u \, f(u) f'(u) X \nabla X.$$

Si $\sigma = 0$, v est constante et (36) est immédiat.

Si $\sigma \neq 0$, en remarquant que $\nabla v = f'(u) \nabla u$ on obtient

$$\int \left(1 + \frac{f(u) f''(u)}{f'(u)^2}\right) A(x) \nabla v \nabla v \, X^2 = -2 \int A(x) \nabla v \, v \, X \nabla X.$$

Le salut de cette manipulation vient du fait que pour les fonctions puissance,

$$\frac{f(s).\, f''(s)}{f'(s)^2} = \frac{\sigma-1}{\sigma}$$

de sorte qu'au final

$$\int A(x)\, \nabla v\, \nabla v\, \chi^2 = -2\left(\frac{\sigma}{2\sigma-1}\right) \int A(x)\, \nabla v\, v\, \chi\, \nabla \chi .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young appliquées au membre de droite permettent de conclure comme dans la preuve de l'inégalité de Caccioppoli classique (voir le Lemme VI. 1).

Il nous reste à nous débarrasser de la condition $u \geq \varepsilon > 0$. Pour u quelconque, on pose $u_n = u + \frac{1}{n}$ et $v_n = f(u_n)$. La suite u_n converge ponctuellement et de façon monotone vers u. Puisque $v \in L^2(\Omega)$ par hypothèse, on déduit du théorème de convergence de Levi que $\int_\Omega v_n^2 \longrightarrow \int_\Omega v^2$.

L'inégalité (36) appliquée à chaque v_n nous assure que v_n est uniformément bornée dans $H^1(K)$, et ensuite que

$$\int_K |\nabla v|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_K |\nabla v_n|^2 \leq C_K \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1}\right)^2 \int_\Omega v^2$$

ce qui termine la preuve. ∎

Lemme VII. 4 Soit $u \in H^1(\Omega)$, $u > 0$ solution de (29). Il existe une constante $\sigma^* > 0$ ne dépendant que de N, λ et Λ telle que pour $\sigma \in [0, \sigma^*]$ et $v = u^\sigma$, $B(x, 2r) \subset \Omega$,

$$(37) \qquad \fint_{B(x,r)} v \cdot \fint_{B(x,r)} v^{-1} \leq C,$$

où C ne dépend que de N, λ, Λ.

Preuve du Lemme VII. 4 Nous commençons par supposer que $u \geq \varepsilon > 0$ sur Ω. On pose $w = \log u$ et $\varphi = \frac{1}{u} \chi^2$, où χ est une fonction plateau pour $B(x, r)$ dans $B(x, 2r) \subset \Omega$. On a $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et puisque u est solution de (29),

$$\int_\Omega A(x) \nabla u \nabla \varphi = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_\Omega A(x) \nabla u \, u^{-2} \nabla u \, \chi^2 = 2 \int_\Omega A(x) \nabla u \, u^{-1} \chi \nabla \chi.$$

En remarquant que $\nabla w = u^{-1} \nabla u$ on obtient

$$\int_\Omega A(x) \nabla w \nabla w \, \chi^2 = 2 \int_\Omega A(x) \nabla w \, \chi \nabla \chi.$$

L'ellipticité de A, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de Young nous donnent une fois encore

$$\int_{B(x,r)} |\nabla w \tau|^2 \leq C \int_{B(x,2r)} |\nabla \tau|^2 \leq C r^{N-2},$$

où C ne dépend que de N, λ, Λ.
L'inégalité de Poincaré-Wirtinger nous assure alors que

$$\fint_{B(x,r)} |w - \overline{w}_{x,r}|^2 \leq C ,$$

autrement dit $w \in BMO$ et sa norme dans BMO ne dépend que de N, λ, Λ.
Par le Théorème de John-Nirenberg, on a alors

$$\fint_{B(x,r)} \exp(\gamma |w - \overline{w}_{x,r}|) \leq C \quad \forall\, 0 < \gamma \leq \gamma^*$$

quelle que soit $B(x, 2r) \subset \Omega$. En particulier,

$$\fint_{B(x,r)} \exp(\gamma w) \fint_{B(x,r)} \exp(-\gamma w) \leq C^2 ,$$

et puisque $w = \log u$,

$$\fint_{B(x,r)} u^{\gamma} \fint_{B(x,r)} u^{-\gamma} \leq C^2 \quad \forall\, 0 < \gamma \leq \gamma^* .$$

Il suffit donc de définir $\sigma^* = \gamma^*$.
Pour se débarrasser de l'hypothèse $u \geq \epsilon$ on procède comme dans la preuve du lemme précédent en posant $u_n = u + \frac{1}{n}$.
Puisque $u > 0$,

$$\fint_{B(x,r)} u_n^{\sigma} \quad \text{est minorée par une}$$

constante strictement positive (qui dépend a priori de u !) on obtient par (37) appliqué à $v_n = u_n^{\sigma}$,

$$\fint_{B(x,r)} u_n^{-\sigma} \leq C$$

indépendamment de n, d'où par convergence monotone $u^{-\sigma} \in L^1$ et (37) est vérifiée pour $v = u^{\sigma}$. ■

Nous pouvons maintenant en venir à l'inégalité de Harnack proprement dite.

<u>Théorème VII.5</u> (Inégalité de Harnack - Moser)
Soit $u \in H^1(\Omega)$, $u > 0$ solution de (29) sur Ω. Quel que soit le compact $K \subset \Omega$ on a

$$\sup_K u \leq C \inf_K u$$

où C ne dépend que de K, Ω, λ, Λ et N.

Preuve du Théorème VII. 5

Nous commençons par le cas où $K = \overline{B(x,r)}$ est tel que $B(x, 4r) \subset \Omega$, le cas général s'obtenant alors par un argument de recouvrement.

On pose, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$K_j = B(x, (1+2^{-j})r)$$

$$v_j = u^{\frac{\sigma^*}{2}\alpha^j}$$

$$w_j = u^{-\frac{\sigma^*}{2}\alpha^j},$$

où $\alpha = \frac{N}{N-2}$ si $N \geq 3$ et $\alpha = 2$ sinon.

On pose ensuite

$$a_j = \| v_j \|_{L^2(K_j)}^{\frac{2}{\sigma^*}\alpha^{-j}}, \quad b_j = \| w_j \|_{L^2(K_j)}^{\frac{2}{\sigma^*}\alpha^{-j}}.$$

Le Lemme VII. 4 nous assure que

(38) $$a_0 \leq C\, b_0$$

où C ne dépend que de N, d, Λ.

Le Lemme VII. 3 et l'inégalité de Sobolev entraînent, comme dans la preuve de la Proposition VII. 2 que

(39) $$a_{j+1} \leq C\, 2^{j\frac{\alpha^{-j}2}{\sigma^*}} a_j$$

où C dépend de r.

De même, on obtient

$$b_{j+1}^{-1} \leq C\, 2^{j \alpha^{-j\frac{\varepsilon}{\sigma^*}}}\, b_j^{-1}$$

c-à-d

$$(40) \qquad b_{j+1} \geq C\, 2^{-j\alpha^{-j\frac{\varepsilon}{\sigma^*}}}\, b_j$$

En combinant (38), (39) et (40) on a

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}}\; a_j \leq C \exp\left(c \sum_{k=0}^{\infty} k\, \alpha^{-k}\right) \underline{\lim_{j\to+\infty}}\; b_j$$

où C ne dépend que de R, N, λ et Λ. La conclusion suit du fait que

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}}\; a_j = \sup_{B(x,r)} u$$

et

$$\underline{\lim_{j\to+\infty}}\; b_j = \inf_{B(x,r)} u .$$

Dans le cas général, sur $K \subset \Omega$ et si $x, y \in K$, on construit une chaîne de boules auxquelles on peut appliquer l'étape précédente et qui relient x à y. On obtient ainsi, si on utilise m boules, $C^{-m} u(x) \leq u(y) \leq C^{m} u(x)$. Par compacité de K on montre que m est uniformément borné pour x et y dans K d'où la conclusion. ∎

De l'inégalité de Harnack on obtient sans difficulté le résultat principal de cette section, à savoir l'holdérianité des solutions de (29).

Théorème VII.6 (De Giorgi)

Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de (29). Alors quel que soit $K \subset \Omega$ compact on a $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(K)$ et l'estimation

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

où C ne dépend que de K, Ω, N, λ et Λ.

Preuve du Théorème VII.6

En appliquant la Proposition VII.2 à u et $-u$ on obtient d'abord que

$$\|u\|_{L^\infty(K)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Soit $B(x,4R) \subset \Omega$, pour $0 < r \leq R$ on pose

$$M(r) = \sup_{B(x,r)} u, \quad m(r) = \inf_{B(x,r)} u$$

(on parle bien sûr de suprémum et infimum essentiel). On applique l'inégalité de Harnack aux solutions positives

$$u - m(r) \quad \text{et} \quad M(r) - u,$$

ceci nous donne

$$\begin{cases} \sup\limits_{B(x,r/4)} M(r)-u \leq C \inf\limits_{B(x,r/4)} M(r)-u \\ \sup\limits_{B(x,r/4)} u-m(r) \leq C \inf\limits_{B(x,r/4)} u-m(r) \end{cases}$$

c-à-d

$$\begin{cases} M(r)-m(r/4) \leq C\left(M(r)-M(r/4)\right) \\ M(r/4)-m(r) \leq C\left(m(r/4)-m(r)\right) \end{cases}$$

et donc

$$\left[M(r/4)-m(r/4)\right] \leq \frac{C-1}{C+1}\left[M(r)-m(r)\right].$$

Puisque $r \leq R$ est quelconque, on obtient

$$|u|_{\mathcal{C}^{0,0}(B(x,R4^{-j}))} \leq \left(\frac{C-1}{C+1}\right)^{j} |u|_{\mathcal{C}^{0,0}(B(x,R))}$$

et ensuite

$$|u|_{\mathcal{C}^{0,0}(B(x,\rho))} \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\log_4\left(\frac{C-1}{C+1}\right)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

La conclusion suit facilement ■

IX Equation des surfaces minimales sous forme de graphes

Soit Ω un ouvert borné régulier, connexe, et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction donnée régulière.
A toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on associe l'aire de son graphe

$$A(u) \equiv \int_\Omega F(\nabla u) \equiv \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2} .$$

On dit que u est une surface minimale pour la donnée au bord g si u minimise $A(.)$ parmi toutes les fonctions de $H^1(\Omega)$ ayant g pour trace. Classiquement, toute surface minimale vérifie une équation d'Euler-Lagrange :

<u>Lemme IX.1</u> Si $u \in H^1_g(\Omega)$ est une surface minimale, alors

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

au sens où

$$(9.1) \qquad \int_\Omega \frac{\nabla u \nabla \varphi}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0 \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega) .$$

<u>Preuve du Lemme IX.1</u>

Il suffit d'écrire que la fonction $s \longmapsto A(u+s\varphi)$ possède un minimum en $s=0$ et de s'assurer qu'elle y est dérivable. ∎

Notre premier but dans cette section est d'étudier la régularité locale des solutions de l'équation des surfaces minimales.

Nous commençons par le

<u>Lemme IX. 2</u> Si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ est solution de (9.1) alors $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ et chacune des dérivées premières $v = \partial_k u$ de u vérifie l'équation

$$(9.2) \qquad \operatorname{div}\left(A_{ij} \nabla v \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

où $$A_{ij}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial_i \partial_j}\left(\nabla u(x) \right).$$

<u>Preuve du Lemme IX. 2</u> La méthode de la preuve, comme dans le cas des équations linéaires, est celle des translations de Nirenberg.

On pose, pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \Omega$ tel que $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon$,

$$\tau_{\varepsilon,k}\, u(x) = \frac{u(x + \varepsilon e_k) - u(x)}{\varepsilon}.$$

Nous voulons montrer que, étant donné $K \subset \Omega$ compact fixé, les fonctions $\{\tau_{\varepsilon,k}\, u\}_{\varepsilon > 0}$ sont uniformément bornées dans $H^1(K)$.

Soit χ une fonction plateau pour K dans Ω, on teste l'équation (9.1) pour u avec

$$\varphi := \tau_{-\varepsilon,k}\left(\chi^2\, \tau_{\varepsilon,k}\, u \right).$$

On obtient

$$0 = \int_\Omega \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \cdot \tau_{-\varepsilon,k}\left(\nabla\left(\chi^2 \tau_{\varepsilon,k} u\right)\right)$$

(9.3)

$$= - \int_\Omega \tau_{\varepsilon,k}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) \cdot \nabla\left(\chi^2 \tau_{\varepsilon,k} u\right).$$

Comme

$$\tau_{\varepsilon,k}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \varepsilon^{-1} \int_0^1 \frac{d}{ds} \nabla F\left(\nabla u + \varepsilon s \tau_{\varepsilon,k} \nabla u\right) ds$$

$$= \int_0^1 D^2 F\left(\nabla u + \varepsilon s \tau_{\varepsilon,k} \nabla u\right) \nabla \tau_{\varepsilon,k} u \, ds$$

$$= \left(\int_0^1 D^2 F\left(\nabla u + \varepsilon s \tau_{\varepsilon,k} \nabla u\right) ds\right) \nabla \tau_{\varepsilon,k} u$$

on réécrit (9.3) sous la forme

$$(9.4) \quad \int_\Omega B(x) \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla\left(\chi^2 v_\varepsilon\right) = 0$$

où $v_\varepsilon := \tau_{\varepsilon,k} u$ et $B = (B_{ij}) = \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial_i \partial_j}\left(\nabla u + \varepsilon s \tau_{\varepsilon,k} \nabla u\right) ds\right)$

Puisque $u \in W^{1,\infty}$ et que

$$\frac{c}{\sqrt{1+p^2}} \leqslant |D^2 F(p)| \leq C$$

on déduit que B vérifie une condition d'ellipticité uniforme (la constante λ dépendant de la norme L^∞ de $p = \nabla u$).

De (9.4) on obtient, comme pour l'inégalité de Caccioppoli, que

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(K)} \leq C \|v_\varepsilon\|_{L^2(\operatorname{supp} X)}$$

$$\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Il suit alors du lemme des translations de Nirenberg que $u_\varepsilon \in H^2(K)$. Puisque la fonction $p \longmapsto \frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}}$ est globalement lipschitzienne et que $\nabla u \in H^1_{loc}(\Omega)$, on a $\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \in H^1_{loc}(\Omega)$

et en différentiant l'équation $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$ par rapport à x_k on obtient (9.2) ∎

Finalement, au moyen du théorème de De Giorgi on obtient le

Théorème IX.3 Si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ est une solution de

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0$$

sur Ω alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. En particulier, toute surface minimale sous forme de graphe est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'intérieur du domaine de définition.

Preuve du Théorème IX.3

Par le lemme IX.2, $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ et $\partial_k u$ vérifie (…) avec A_{ij} matrice à coefficients mesurables satisfaisant une condition uniforme d'ellipticité. Par le théorème de De Giorgi il suit que $\partial_k u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{loc}$, et par conséquent $u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}$ et aussi $A_{ij} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{loc}$. On peut alors remplacer le théorème de De Giorgi par la théorie de la régularité des équations à coefficients Höldériens (section V) et obtenir $\partial_k u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}$, c-à-d $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_{loc}$ et donc aussi $A_{ij} \in \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}$. Ainsi de suite, on montre que $u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{loc}$ quel que soit k ∎

Nous venons donc de voir que le caractère lipschitzien d'une solution de (9.1) suffit à ce qu'elle soit nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$. Même si cela s'écarte un peu de l'esprit du cours, nous allons continuer cette section en établissant l'existence de solutions lipschitziennes (et donc $\mathcal{C}^\infty$) lorsque Ω est convexe.

<u>Théorème IX.4</u> Soit Ω borné régulier et convexe, et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors il existe une surface minimale globalement lipschitzienne s'appuyant sur g. Cette surface u est de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap Lip(\bar\Omega)$.

Remarque : on ne cherche pas plus ici qu'ailleurs dans le cours d'obtenir la meilleure régularité jusqu'au bord. Dans le cas présent, on pourrait montrer que $u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\bar\Omega)$ quel que soit $0 \le \alpha < 1$.

Pour démontrer le Théorème IX.4, nous commençons par considérer les problème de minimisation

$$(P_k) \qquad \min \left\{ A(u),\ u \in Lip_k(\Omega),\ u = g\ \partial\Omega \right\}$$

où $Lip_k(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{C}^{0,1}(\Omega) \text{ t.q. } |u|_{\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)} \leq k \right\}$,

autrement dit, les graphes dont l'aire est minimale parmi ceux dont la constante de Lipschitz est majorée par une constante k fixée.

<u>Lemme IX.5</u> Si il existe au moins une fonction $u \in Lip_k(\Omega)$ telle que $u = g$ sur $\partial\Omega$ alors le problème (P_k) possède un minimiseur u_k.

<u>Preuve du Lemme IX.5</u> Puisque l'ensemble des candidats est non vide, on peut considérer une suite minimisante. Par compacité de $Lip_k(\Omega)$ pour la norme de la convergence uniforme, celle-ci converge à une sous-suite près vers un candidat qui se trouve être le bon par semi-continuité inférieure de la fonctionnelle A. ∎

Le but est maintenant de montrer que pour g fixée, et pour k suffisamment grand, u_k est une surface minimale s'appuyant sur g. Pour cela, il suffit de s'assurer que la contrainte $|u|_{\mathcal{C}^{0,1}} \leq k$ n'est pas saturée pour k grand. Nous suivons pour cela l'argument de Giusti, Minimal surfaces and functions of bounded variation.

<u>Définition</u> Une fonction $u \in Lip_k(\Omega)$ est une sous-solution de l'équation (9.1) dans $Lip_k(\Omega)$ si quelle que soit $v \in Lip_k(\Omega)$, $v = u$ sur $\partial\Omega$, $v \leq u$ sur Ω on a $A(v) \geq A(u)$.
Une fonction $u \in Lip_k(\Omega)$ est une sur-solution de (9.1) dans $Lip_k(\Omega)$ si $-u$ est une sous-solution.

<u>Lemme IX. 6</u> Si u et v sont respectivement des sous- et sur-solutions de (9.1) dans $Lip_k(\Omega)$ et si $v \geq u$ sur $\partial\Omega$ alors $v \geq u$ sur $\overline{\Omega}$.

<u>Preuve du Lemme IX. 6</u> Soit $K = \left\{ x \in \Omega,\ v(x) < u(x) \right\}$ et supposons par l'absurde que $K \neq \emptyset$. On pose $w = \min\{u, v\}$. Puisque $w \in Lip_k(\Omega)$ et $w = u$ sur $\partial\Omega$, on a $A(w) \geq A(u)$ et donc

$$\int_K \sqrt{1+|\nabla v|^2} \geq \int_K \sqrt{1+|\nabla u|^2}.$$

De la même manière, en considérant $z = \max\{u, v\}$ on obtient

$$\int_K \sqrt{1+|\nabla v|^2} \leq \int_K \sqrt{1+|\nabla u|^2}$$

et donc au final les deux quantités sont égales.
Par stricte convexité, on a

$$\int_K \sqrt{1+\left|\nabla\left(\frac{u+v}{2}\right)\right|^2} < \int_K \sqrt{1+|\nabla u|^2}.$$

Mais alors la fonction $\hat{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \notin K \\ \frac{u(x)+v(x)}{2} & \text{si } x \in K \end{cases}$

est telle que $\hat{u} \in Lip_k(\Omega)$, $\hat{u} = u$ sur $\partial\Omega$ mais $A(\hat{u}) < A(u)$, ce qui contredit le fait que u est une sous-solution.

<u>Corollaire IX. 7</u> Si u et v sont des sous et sur solutions de (9.1) dans $Lip_k(\Omega)$ alors

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) - v(x) = \sup_{y \in \partial\Omega} u(y) - v(y)$$

<u>Preuve du Corollaire IX. 7</u> Soit $\alpha = \sup_{y \in \partial\Omega} u(y) - v(y)$.

La fonction $v + \alpha$ est une sur-solution de (9.1) dans $Lip_k(\Omega)$ et par définition de α on a $v + \alpha \geq u$ sur $\partial\Omega$. Il suit du lemme précédent que $v + \alpha \geq u$ sur Ω, d'où la conclusion. ∎

Le principe du maximum précédent permet de ramener l'estimation de la constante de Lipschitz de u_k à une estimation au bord :

<u>Lemme IX. 8</u> On a

$$(9.5) \qquad |u_k|_{C^{0,1}(\Omega)} = \sup \left\{ \frac{|u_k(x) - u_k(y)|}{|x-y|} \; ; \; x \in \Omega, \; y \in \partial\Omega \right\}$$

<u>Preuve du Lemme IX. 8</u>

Soit $x_1, x_2 \in \Omega$, $x_1 \neq x_2$, on pose $\tau = x_2 - x_1$ et $u_{\tau,k}(x) = u_k(x + \tau)$.

Par invariance par translation, $u_{\tau,k}$ minimise A parmi les fonctions de $Lip_k(\Omega_\tau)$ égales à g_τ sur $\partial\Omega_\tau$.

L'ensemble $\Omega \cap \Omega_\tau$ est non vide puisqu'il contient x_1 et à la fois u_k et $u_{\tau,k}$ minimisent A sur $\mathrm{Lip}_k(\Omega \cap \Omega_\tau)$ avec chacune leur donnée au bord.

On déduit de Corollaire IX.7 qu'il existe $z \in \partial(\Omega\cap\Omega_\tau)$ tel que

$$|u_k(x_1) - u_{\tau,k}(x_1)| \leq |u_k(z) - u_{\tau,k}(z)| ,$$

c'est-à-dire,

$$|u_k(x_1) - u_k(x_2)| \leq |u_k(z) - u_k(z+\tau)| .$$

Puisque $z \in \partial(\Omega \cap \Omega_\tau)$, soit $z \in \partial\Omega$ soit $z+\tau \in \partial\Omega$. Comme d'autre part $|x_1 - x_2| = |z - (z+\tau)| = \tau$ la conclusion suit. ∎

Puisque $u_k = g$ sur $\partial\Omega$, de (9.5) on obtient

(9.6) $$|u_k|_{C^{0,1}(\Omega)} = \sup\left\{ \frac{|u_k(x) - g(y)|}{|x-y|}, x \in \Omega, y \in \partial\Omega \right\}.$$

Si ϕ_+ et ϕ_- sont deux fonctions lipschitziennes sur Ω et telles que

(9.7) $$\phi_- \leq u_k \leq \phi_+ \quad \text{sur } \Omega$$

(9.8) $$\phi_- = \phi_+ = g \quad \text{sur } \partial\Omega$$

alors il suit de (9.6) que

$$|u_k|_{C^{0,1}(\Omega)} \leqslant \sup\left\{ |\phi_-|_{C^{0,1}(\Omega)}, |\phi_+|_{C^{0,1}(\Omega)} \right\}$$

La construction de telles fonctions ϕ_- et ϕ_+, nommées fonctions barrières, est l'objet du paragraphe ci-dessous.

On pose

$$\Sigma_t = \{ x \in \Omega \ t.q. \ dist(x, \partial\Omega) < t \}$$

$$\Gamma_t = \{ x \in \Omega \ t.q. \ dist(x, \partial\Omega) = t \}$$

<u>Lemme IX.9</u> Soit $\phi : \overline{\Sigma}_t \to \mathbb{R}$ t.q. $\phi = g$ sur $\partial\Omega$ une sur-solution de (9.1) qui vérifie

(9.9) $\qquad \phi \geq \max g$ sur Γ_t

alors pour $k \geq |\phi|_{C^{0,1}}$ on a

$$u_k \leq \phi \quad \text{sur } \overline{\Sigma}_t .$$

<u>Preuve du Lemme IX.9</u> Par le principe du maximum, $u_k \leq \max g$ sur Γ_t, et donc $u_k \leq \phi$ sur $\partial\overline{\Sigma}_t$. La conclusion suit du Lemme IX.6 ∎

On a bien sûr un résultat analogue pour les sous-solutions.

<u>Proposition IX.10</u> Si Ω est convexe il existe des fonctions barrières lipschitziennes ϕ_- et ϕ_+ qui vérifient (9.7) et (9.8) pour tous les k suffisamment grands. Par conséquent,

$$\sup_k |u_k|_{C^{0,1}(\Omega)} < +\infty .$$

Preuve de la Proposition IX. 10

La preuve consiste à construire explicitement une barrière locale ϕ_+ sur Σ_t pour t suffisamment petit, et ensuite de considérer son extension harmonique à l'intérieur de $\Omega \setminus \Sigma_t$.

1ère étape : construction de ϕ_+ dans Σ_t.

Puisque $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et compact, il existe $t_0 > 0$ tel que tout point $x \in \Sigma_{t_0}$ possède une unique projection sur $\partial\Omega$ (au sens d'un point minimisant la distance), t_0 est essentiellement l'inverse du maximum des courbures principales de $\partial\Omega$. L'appendice suivant cette preuve montre que la fonction $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ dans Σ_{t_0} et que de plus

$$(9.10) \qquad \Delta d(x) = - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{k_i(p(x))}{1 - d(x)\, k_i(p(x))}$$

où p désigne la projection sur $\partial\Omega$ et $k_1, \dots, k_{N-1}$ désignent les $(N-1)$ courbures principales de $\partial\Omega$.

Puisque Ω est convexe, chaque k_i est positive et dès lors

$$(9.11) \qquad \Delta d(x) \leq 0 \quad \text{dans } \Sigma_{t_0}.$$

On définit alors ϕ dans Σ_{t_0} par

$$\phi(x) = h(x) + \psi(d(x)),$$

où h désigne l'extension harmonique de g dans Ω et ψ est une fonction réelle d'une variable réelle que nous déterminerons par la suite.

Afin d'utiliser le Lemme IX.9, nous voudrions choisir ψ de telle sorte que ϕ soit une sur-solution de (9.1) dans un Σ_t avec $t \leq t_0$ qui vérifie 9.9 (par définition de ϕ on aura clairement $\phi = g$ sur $\partial\Omega$ si $\psi(0) = 0$).

Puisque h et d sont de classe $\mathcal{C}^2$, dire que ϕ est sur-solution sur Σ_t avec ψ $\mathcal{C}^2$ est équivalent à l'inéquation

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\phi}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2}}\right) \leq 0 \quad \text{dans } \Sigma_t \;,$$

qui se réécrit, après développement et simplification par le facteur positif $(1+|\nabla\phi|^2)^{-3/2}$:

$$(1+|\nabla\phi|^2)\,\Delta\phi - \sum_{i,j} \partial_i\phi\, \partial_j\phi\, \partial_{ij}\phi \leq 0$$

dans Σ_t. Il nous faut développer les dérivées premières et secondes de ϕ. Remarquons d'abord que $|\nabla d| = 1$ identiquement et que par conséquent

$$\sum_i \partial_i d\, \partial_{ij} d \equiv 0 \;, \quad \forall j.$$

On a,

$$\partial_i \phi = \partial_i h + \psi'(d)\partial_i d$$

et

$$\partial_{ij} \phi = \partial_{ij} h + \psi'(d)\partial_{ij} d + \psi''(d)\partial_i d \partial_j d .$$

Par conséquent,

$$\Delta\phi = \Delta h + \psi'(d)\Delta d + \psi''(d)|\nabla d|^2$$
$$= \Delta h + \psi'(d)\Delta d + \psi''(d)$$

et

$$(1+|\nabla\phi|^2) = 1 + |\nabla h|^2 + \psi'^2(d) + 2\psi'(d)\sum_i \partial_i h \partial_i d .$$

D'autre part

$$\sum_{i,j} \partial_i\phi\partial_j\phi\partial_{ij}\phi = \sum_{i,j} \partial_i h \partial_j h \partial_{ij} h$$
$$+ \psi'(d)\left[\sum_{i,j} \partial_i h \partial_j d \partial_{ij} h + \partial_j h \partial_i d \partial_{ij} h + \partial_i h \partial_j h \partial_{ij} h\right]$$
$$+ \psi'^2(d)\left[\sum_{i,j} \partial_i h \partial_j d \partial_{ij} d + \partial_j h \partial_i d \partial_{ij} d + \partial_i d \partial_j d \partial_{ij} h\right]$$
$$+ \psi'^3(d) \underbrace{\sum_{i,j} \partial_i d \partial_j d \partial_{ij} d}_{= \sum_i \partial_i d \frac{1}{2}\partial_i(|\nabla d|^2) = 0}$$
$$+ \psi'(d)\psi''(d)\left[\sum_{i,j} \underbrace{\partial_i h \partial_j d \partial_i d \partial_j d + \partial_j h \partial_i d \partial_i d \partial_j d}_{= 2\sum_i \partial_i d \partial_i h}\right]$$
$$+ \psi'^2(d)\psi''(d)\left[\underbrace{\sum_{i,j} \partial_i d \partial_j d \partial_i d \partial_j d}_{=1}\right]$$
$$+ \psi''(d)\left[\sum_{i,j} \partial_i h \partial_j h \partial_i d \partial_j d\right].$$

Après multiplication, soustraction et mise en correspondance des termes on obtient ainsi

$$\Delta\phi\,(1+|\nabla\phi|^2) - \sum_{i,j} \partial_i\phi\,\partial_j\phi\,\partial_{ij}\phi$$
$$= A(h,d) + B(h,d)\,\psi'(d) + C(h,d)\,\psi'^2(d) + D(h,d)\,\psi''(d) + E(h,d)\,\psi'^3(d),$$

où A, B, C sont bornés par une constante ne dépendant que de h et d. De plus,

$$D(h,d) = 1+|\nabla h|^2 - (\nabla h\cdot\nabla d)^2 \geq 1$$

et
$$E(h,d) = \Delta d \leq 0$$
puisque Ω est convexe.
Si ψ est telle que sur Σ_t,

(9.12) $\quad \psi'(d) \geq 1$
(9.13) $\quad \psi''(d) \leq 0$

on aura
$$\Delta\phi\,(1+|\nabla\phi|^2) - \sum_{i,j} \partial_i\phi\,\partial_j\phi\,\partial_{ij}\phi \leq C\,\psi'^2(d) + \psi''(d)$$
où C est une constante. Posons dès lors

$$\psi(s) = \alpha \log(1+\beta s) \quad , \quad \alpha, \beta > 0$$

On a
$$\psi'(s) = \frac{\alpha\beta}{1+\beta s} \quad , \quad \psi''(s) = -\frac{\alpha\beta^2}{(1+\beta s)^2}$$

et donc (9.13) est vérifiée et

$$C\,\psi'^2(d) + \psi''(d) = (1+\beta s)^{-2}\alpha\beta^2\,(C\alpha - 1) \leq 0$$

dès que $\alpha \leq \frac{1}{C}$, inégalité que l'on supposera maintenant être une égalité.

On choisit alors $t = \beta^{-1/2}$, et donc

$$\psi'(d) \geq \psi'(\beta^{-1/2}) = \frac{\alpha\beta}{1+\sqrt{\beta}}$$

et (9.12) sera satisfaite si β est choisi assez grand. De même, sur Γ_t on aura

$$\begin{aligned} \phi &= h + \psi(\beta^{-1/2}) \\ &\geq \min g + \alpha \log(1+\beta^{1/2}) \\ &\geq \max g \end{aligned}$$

si β est choisi assez grand.

<u>2ème étape</u> : extension de ϕ à l'extérieur de Σ_t

On définit ϕ dans $\Omega \setminus \Sigma_t$ comme l'extension harmonique de $\phi_{|\Gamma_t}$. Puisque $\phi_{|\Gamma_t} \geq \max g$, on a $\phi(x) \geq \max g$ pour tout $x \in \Omega \setminus \Sigma_t$. Comme d'autre part $u_k \leq \max g$ par le principe du maximum faible, on déduit que

$$u_k \leq \phi \quad \text{sur } \Omega \setminus \Sigma_t,$$

et la conclusion suit.

Nous obtenons maintenant sans peine la

Preuve du Théorème IX. 4

Puisque $\sup |u_k|_{\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)} < +\infty$, on a

$$|u_k|_{\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)} < k \text{ pour } k \text{ suffisamment}$$

grand, et par conséquent u_k est une surface minimale s'appuyant sur g. ■

Pour terminer cette section, nous présentons la démonstration de la formule (9.10).

Preuve de la formule (9.10) et du caractère $\mathcal{C}^2$ de $d(x)$.

Quitte à un changement de repère, on peut supposer que $x = 0$ et que $\partial\Omega$, au voisinage de $p(x) = p(0)$, est décrit par le graphe d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^{N-1}$ dans $\mathbb{R}$

$$x_N = f(x_1, \dots, x_{N-1}),$$

pour laquelle $f(0,\dots,0) = d$, $\nabla f(0,\dots,0) = (0,\dots,0)$.
Sans perte de généralité, on peut également supposer que les axes de coordonnées $x_1, \dots, x_{N-1}$ sont des vecteurs propres de la matrice symétrique $D^2 f(0,\dots,0)$.
Etant donné $x' = (x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$, on définit $\overline{x} = (x', f(x')) \in \text{Graphe}(f)$.
Soit

$$g : (0,d) \ni \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
$$(x', s) \longmapsto \overline{x} + s\nu(\overline{x})$$

où ν désigne la normale intérieure à Ω :

$$\nu(\bar{x}) = \left(\frac{+\partial_1 f(x')}{\sqrt{1+|\nabla f(x')|^2}}, \dots, \frac{+\partial_{N-1} f(x')}{\sqrt{1+|\nabla f(x')|^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla f(x')|^2}} \right).$$

Remarquons que

$$g(0,d) = (0,d)$$

et que

$$Dg(0,d) = \left(\partial_j \left(\bar{x}_i + s\nu_i(\bar{x}) \right) \right)_{i,j} \Big|_{(0,d)} .$$

On a, pour $1 \leq j \leq N-1$, $1 \leq i \leq N-1$

$$\partial_j \bar{x}_i + s\, \partial_j \nu_i(\bar{x}) =$$

$$\delta_{ij} + s \left(\frac{\partial_{ij} f(x') \sqrt{1+|\nabla f|^2(x')} - \partial_j \nabla f \cdot \nabla f \left(1+|\nabla f|^2(x')\right)^{-1/2}}{1+|\nabla f|^2} \right)$$

alors que pour $j = N$,

$$\partial_N g(x', s) = \partial_s g(x,s) = \nu(\bar{x}) .$$

En $(x', s) = (0, d)$, $\nabla f(x') = 0$ et par conséquent

$$Dg(0,d) = \begin{pmatrix} 1-dk_1(p(0)) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1-dk_{N-1}(p(0)) & 0 \\ * & * & \cdots & * & -1 \end{pmatrix}.$$

La formule du déterminant développé suivant la dernière colonne donne

$$\det Dg(0,d) = -\prod_{i=1}^{N-1} \left(1 - dk_1(p(0)) \right)$$

Pour peu que d soit inférieur (strictement) à l'inverse de la plus grande courbure principale de $\partial\Omega$, la quantité précédente est non nulle (et même négative). Par le théorème d'inversion locale, on peut dès lors écrire

$$(x', s) = g^{-1}(y)$$

sur un voisinage ouvert de $(0, d)$, avec g^{-1} de classe $\mathcal{C}^1$. Remarquons que si $g^{-1}(y) = (x', s)$ alors $d(y) = s$ (la fonction $d(\cdot)$ désigne la distance au graphe, ne pas la confondre avec le nombre réel $d = d(0)$).

On a de plus, pour $g^{-1}(y) = (x', s)$

$$\nabla d(y) = \nu(\bar{x}) = \nu(x', f(x')).$$

Puisque x' est une fonction $\mathcal{C}^1$ de y, et que ν et f sont des fonctions $\mathcal{C}^1$ de $(x', f(x'))$ et x' on déduit de l'équation précédente que $d \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$. De plus,

$$\begin{aligned}\Delta d(y) &= \sum_i \partial_i \partial_i d(y) \\ &= \sum_i \partial_i (\nu_i(\bar{x})) \\ &= \sum_{i,j} \partial_j \nu_i(\bar{x})\, \partial_i \bar{x}_j\end{aligned}$$

de sorte que

$$\Delta d(0, d) = \begin{pmatrix} D^2 f(0) & \vdots \\ 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} : \left(Dg(0,d) \right)^{-1} = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{k_i(p(0))}{1 - k_i(p(0))d}$$

et la conclusion suit.

X Systèmes elliptiques

Nous allons voir que les résultats que nous avons obtenus tout au long des chapitres précédents pour les équations elliptiques ne s'étendent pas tous au cas des systèmes. Grosso modo, la théorie Höldérienne reste valide (ainsi que les résultats dont la preuve ne repose que sur l'inégalité de Caccioppoli et/ou la comparaison à des fonctions harmoniques et/ou la méthode des translations). Par contre, comme l'a remarqué De Giorgi lui-même, dix ans après son résultat pour le cas scalaire (Théorème VII.6), les solutions de systèmes elliptiques à coefficients mesurables ne sont pas nécessairement Höldériennes sur l'ensemble du domaine. Rappelons que la démonstration que nous avons donnée du Théorème VII.6 reposait de manière essentielle sur la notion de sur et sous solutions (qui nécessite l'ordre sur $\mathbb{R}$) appliquée à diverses puissances de la solution. La démonstration originale de De Giorgi utilisant les sous-ensembles de niveaux de u, elle repose elle aussi sur le caractère scalaire de u.

Commençons par rappeler, ou définir, la notion de système elliptique.
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert et $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$.
On s'intéresse ici à la régularité locale associée à l'opérateur (ou le système)

(X.1) $$\sum_{i,j,\beta} \partial_i \left(A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\, \partial_j u^\beta \right) \ (=0) \qquad \alpha = 1, \dots, k.$$

Dans le cas scalaire à coefficients constants, l'ellipticité de l'équation : $\lambda |\xi|^2 \leq A_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda |\xi|^2$ était "équivalente" à la positivité de la forme quadratique

$$u \longmapsto \int_\Omega A_{ij}\, \partial_i u\, \partial_j u$$

définie sur $H_0^1(\Omega)$. Dans le cas des système, elle peut être remplacée par la condition d'ellipticité forte (dite aussi condition de Legendre) :

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j,\alpha,\beta} A_{ij}^{\alpha\beta}\, \xi_i^\alpha \xi_j^\beta \leq \Lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{N\times k}.$$

Cette condition est parfois trop forte et n'est pas nécessaire à la positivité de la forme quadratique correspondante. On lui substitue parfois la condition suivante, dite de Legendre - Hadamard :

$$\lambda |\xi|^2 . |\eta|^2 \leq \sum_{i,j,\alpha,\beta} A_{ij}^{\alpha\beta}\, \xi_i \xi_j \eta_\alpha \eta_\beta \leq \Lambda |\xi|^2 . |\eta|^2,$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \ \forall \eta \in \mathbb{R}^k.$$

Il est immédiat que la condition d'ellipticité forte implique la condition de Legendre - Hadamard, en posant

$$\left(\xi_i^\alpha\right)_{i,\alpha} = \left(\xi_i \cdot \eta_\alpha\right)_{i,\alpha}$$

c'est-à-dire en se restreignant aux matrices de rang 1.

On a la

Proposition X.1 (Legendre, Hadamard)

Si $A_{ij}^{\alpha\beta}$, symétriques en (i,j) et (α,β), vérifient la condition de (L-H), alors pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$ on a

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^N} A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_i u^\alpha(x) \partial_j u^\beta(x)\, dx \geqslant \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2 .$$

Preuve de la Proposition X.1

Par l'identité de Parseval-Plancherel et la condition de Legendre-Hadamard on a

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^N} A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_i u^\alpha \partial_j u^\beta = \sum_{i,j,\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^N} A_{ij}^{\alpha\beta} \widehat{\partial_i u^\alpha}\, \overline{\widehat{\partial_j u^\beta}}$$

$$= 4\pi^2 \sum_{i,j,\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^N} A_{ij}^{\alpha\beta} y^i y^j \widehat{u^\alpha}\, \overline{\widehat{u^\beta}} =$$

$$= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j,\alpha,\beta} A_{ij}^{\alpha\beta} y^i y^j (\mathrm{Re}\, \widehat{u^\alpha}\, \mathrm{Re}\, \widehat{u^\beta} + \mathrm{Im}\, \widehat{u^\alpha}\, \mathrm{Im}\, \widehat{u^\beta})$$

$$\geqslant 4\pi^2 \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |y|^2 |\hat{u}|^2$$

$$= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 ,$$

et la conclusion suit. ∎

<u>Remarque</u> A la différence de la condition d'ellipticité forte, la condition de Legendre-Hadamard ne permet pas d'obtenir (facilement) la positivité de la forme quadratique si les coefficients $A_{ij}^{\alpha\beta}$ dépendent de la variable x.

Venons en maintenant à l'inégalité de Caccioppoli, l'ingrédient de base de la théorie hilbertienne :

<u>Proposition X.2</u> Soit $A_{ij}^{\alpha\beta}(x)$, symétriques en (α,β) et (i,j), et $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ tel que $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ et

$$(X.2) \qquad \sum_{i,j,\beta} \partial_i \left(A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\, \partial_j u^\alpha \right) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

On suppose de plus que soit

a) les $A_{ij}^{\alpha\beta}(.)$ sont mesurables et satisfont à la condition d'ellipticité forte.

b) les $A_{ij}^{\alpha\beta}(.)$ sont continus et satisfont à la condition de Legendre - Hadamard.

Alors pour $K \subset \Omega$ compact, on a l'estimation

$$\|\nabla u\|_{L^2(K)} \leq C \, \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

où C ne dépend que de $K, \Omega, \lambda, \Delta$ et, dans le cas b), du module de continuité des $A_{ij}^{\alpha\beta}$.

<u>Preuve de la Proposition X.2</u> On ne considère que le cas b), le cas a) étant rigoureusement similaire à celui du scalaire.

Soit $x_0 \in K$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, 2r) \subset \Omega$.
Soit χ une fonction plateau pour $B(x_0, r)$ dans $B(x_0, 2r)$.

On réécrit (X.2) sous la forme

$$- \partial_i \left(A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) \partial_j u^\beta \right) = \partial_i \left(\left[A_{ij}^{\alpha\beta}(x) - A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) \right] \partial_j u^\beta \right),$$

(oubliant par soucis d'économie les signes de sommation) qui, testée dans sa forme faible contre $\chi^2(x) u$ donne

$$\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) \partial_i u^\alpha \partial_j u^\beta \chi^2 = -2 \int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(x) \partial_i \chi \partial_j u^\beta u^\alpha \chi$$
$$+ \int_\Omega \left[A_{ij}^{\alpha\beta}(x) - A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) \right] \partial_i u^\alpha \partial_j u^\beta \chi^2$$
$$+ 2 \int_\Omega \left[A_{ij}^{\alpha\beta}(x) - A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) \right] \partial_i \chi \partial_j u^\beta u^\alpha \chi$$

La condition de Legendre - Hadamard et la Proposition X.1 assurent que le membre de gauche de l'égalité précédente est minoré par

$$\lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \chi^2 .$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Young et la continuité de $A_{ij}^{\alpha\beta}$ nous permettent de majorer le terme de droite par

$$\left(\frac{\lambda}{3} + \tau \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 \chi^2 + C \int_\Omega |u|^2,$$

où τ désigne l'oscillation de $A_{ij}^{\alpha\beta}$ sur $B(x_0, 2r)$ et C ne dépend que de r, λ, Λ. Si $\tau \leq \frac{\lambda}{3}$ (ce que l'on peut supposer en choisissant r suffisamment petit puisque les $A_{ij}^{\alpha\beta}$ sont continus) on obtient ainsi

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 \leq C \int_{B(x_0,2r)} |u|^2 .$$

L'estimation sur K tout entier s'obtient par un argument classique de recouvrement, utilisant la compacité de K ∎

<u>Remarque</u> Pour le système inhomogène

$$- \sum_{i,j,\beta} \partial_i \left(A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\, \partial_j u^\beta \right) = \sum_i \partial_i g^\alpha$$

avec $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ et $g \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ on obtient l'estimation

$$\|\nabla u\|_{L^2(K)} \leq C \left[\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right]$$

sous les mêmes hypothèses d'ellipticité. La preuve est une adaptation immédiate de la preuve qui précède.

Tout comme l'inégalité de Caccioppoli, la méthode des translations de Nirenberg s'étend aux systèmes :

<u>Proposition X.3</u> Si $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ est solution faible du système

$$- \sum_{i,j,\beta} \partial_i \left(A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\, \partial_j u^\beta \right) = \sum_i \partial_i g^\alpha \quad \alpha = 1, \dots, k$$

où $g \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ et les $A_{ij}^{\alpha\beta} \in Lip(\Omega)$ satisfont la condition de Legendre - Hadamard , alors quel que soit le compact $K \subset \Omega$ on a l'estimation

$$\|u\|_{H^2(K)} \leq C\left[\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}\right],$$

où C ne dépend que de K, Ω, λ, Λ et $\|A_{ij}^{\alpha\beta}\|_{Lip}$.

<u>Preuve de la Proposition X.3</u> Elle consiste à singer celle faite de la Proposition VI.3, en se basant cette fois sur l'inégalité de Caccioppoli pour les systèmes (Proposition X.2). ∎

Enfin, mentionnons aussi l'extension suivante du Théorème VI.4 pour les systèmes.

<u>Théorème X.4</u> Si $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ est solution faible de l'équation

$$-\sum_{i,j,\beta} \partial_i\left(A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\,\partial_j u^\beta\right) = \sum_i \partial_i g^\alpha$$

avec $g \in \mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega)$, $A_{ij}^{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ vérifiant la condition de Legendre-Hadamard, alors $u \in \mathcal{C}^{m+1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ et quel que soit le compact $K \subset \Omega$ on a l'estimation

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{m+1,\alpha}(K)} \leq C\left[\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{\mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega)}\right]$$

où C dépend de K, Ω, $A_{ij}^{\alpha\beta}$.

<u>Preuve du Théorème X.4</u> Ici encore il s'agit d'adapter (sans trop de difficulté) les arguments mis en

oeuvre à la Section V. Les détails sont laissés au lecteur. ∎

La théorie de De Giorgi - Nash - Moser ne s'étend pas en temps que telle aux systèmes. Pour s'en convaincre, nous avons le

<u>Contre-exemple de Necas ('75)</u>

L'avantage du contre exemple de Necas sur celui, original, de De Giorgi, est qui provient d'un problème variationnel autonome.

Soit la forme variationnelle donnée par

$$I(u) = \int_\Omega F(\nabla u) \quad ; \quad u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N\times N}$$

où

$$F(\nabla u) := \frac{1}{2}\, \partial_i u^{\alpha\beta}\, \partial_i u^{\alpha\beta} + \mu\, \partial_\alpha u^{\alpha\beta}\, \partial_\beta u^{ii} + \lambda\, \partial_\alpha u^{\alpha\beta}\, \partial_a u^{ai}\, \partial_\ell u^{\ell b}\, \partial_b u^{\beta i} \langle \nabla u \rangle^{-2},$$

$$\mu = \frac{4 + N\lambda}{2(N^2 - N + 1)}, \quad \lambda = 2\, \frac{N^3 - 1}{N(N-1)(N^3 - N + 1)}, \quad \langle \nabla u \rangle = (1 + |\nabla u|^2)^{1/2}.$$

Clairement, on a $\| D^2 F \|_{L^\infty} \leq C$, indépendamment de N. D'autre part, λ et μ tendent vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

On vérifie (avec peine !) que la fonction matricielle $u^{\alpha\beta}(x) = \dfrac{x^\alpha x^\beta}{|x|^2}$ est une solution de l'équation d'Euler - Lagrange associée à I. Chaque de ses dérivées spatiales v satisfont alors au système

$$- \partial_i \left(A_{ij}^{(\alpha,\beta)(\alpha',\beta')}(x) \, \partial_j v^{(\alpha',\beta')} \right) = 0 ,$$

où $A_{ij}^{(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')} = \partial^2_{(i,(\alpha,\beta)),(j,(\alpha',\beta'))} F(\nabla u(x))$.

(Du est décrit par trois indice, un pour la variable x et deux autres car u est à valeur dans $\mathbb{R}^{N\times N}$).

Clairement, on a $v \in H^1$ ($v = \partial u$ et $u = \frac{x^\alpha x^\beta}{|x|^2}$), et les $A_{ij}^{(\alpha,\beta)(\alpha',\beta')}$ satisfont la condition d'ellipticité forte dès que N est suffisamment grand. En effet,

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta,\alpha',\beta'} A_{ij}^{(\alpha,\beta)(\alpha',\beta')}(x) \, \xi_i^{(\alpha,\beta)} \xi_j^{(\alpha',\beta')} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} \xi_i^{(\alpha,\beta)} \xi_j^{(\alpha',\beta')} + O(\lambda,\mu) |\xi|^2$$

et $\lambda, \mu = o(1)$ qd $N \to +\infty$.

Par contre $v \notin \mathcal{C}^{0,\alpha}$, comme le suggérerait la théorie de De Giorgi du cas scalaire, et en fait on a même $v \notin \mathcal{C}^0$.

Dans l'exemple qui précède, v n'est pas régulière à l'origine mais est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors. Dans cette direction, nous allons démontrer le théorème suivant qui fournit une borne supérieure sur l'ensemble des points de non régularité des solutions.

Théorème X.5 Soit $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ une solution de

$$(X.3) \qquad -\sum_{i,j,\beta} \partial_i \left(A_{ij}^{\alpha\beta}(x,v)\, \partial_j v \right) = 0 \qquad \Omega$$

où les coefficients $A_{ij}^{\alpha\beta}$ sont uniformément continus sur $\overline{\Omega}$ en les variables (x,v) et satisfont à la condition d'ellipticité forte

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j,\alpha,\beta} A_{ij}^{\alpha\beta}(x,v)\, \xi_i^\alpha \xi_j^\beta \leq \Lambda |\xi|^2$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{N \times m}$, les constantes λ et Λ ne dépendent pas de (x,v).

Alors il existe un ouvert $\Omega_0 \subset \Omega$ tel que

$$v \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega_0) \quad \forall\, 0 < \alpha < 1$$

et

$$\mathcal{H}^{N-2}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$$

Remarque Il ne s'agit pas d'un résultat linéaire à coefficients mesurables (un tel résultat n'est pas disponible dans le cas des systèmes) mais bel et bien un résultat non-linéaire car on suppose que A dépend de v. Dans le cas scalaire, le manque d'information a priori sur $A_{ij}(\nabla u)$ (avec $v = \nabla u$) nous amenait à le traiter comme un $\hat{A}_{ij}(x)$. Ici, nous ne pouvons agir de la sorte, et nous n'obtenons qu'une régularité partielle.

La preuve du Théorème X.5 repose sur le résultat suivant, de type ε-régularité.

<u>Lemme X.6</u> Sous les hypothèses du Théorème X.5, pour tout $0 < \alpha < 1$ il existe $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$, $\varepsilon_0 > 0$ et $R_0 > 0$ tel que si $x_0 \in \Omega$, $0 < R < R_0$, $B(x_0, R) \subset \Omega$ et

$$E(x_0,R) := \int_{B(x_0,R)} | v - \bar{v}_{x_0,R} |^2 < \varepsilon_0$$

alors
$$E(x_0, \theta R) \leq \theta^{2\alpha} E(x_0, R) .$$

<u>Preuve du Lemme X.6</u>

La preuve consiste à se ramener au cas où $A_{ij}^{\alpha\beta}$ ne dépend pas de x ni de v par un argument de blow-up.

Supposons en effet que V satisfasse au système

$$-\sum_{i,j,\beta} \partial_i (B_{ij}^{\alpha\beta} \partial_j V^\beta) = 0 \qquad B(x_0, R)$$

avec $B_{ij}^{\alpha\beta}$ constantes vérifiant la même condition d'ellipticité forte que $A_{ij}^{\alpha\beta}(x,v)$. Alors par la théorie Holdérienne on aurait

$$\int_{B(x_0,\theta R)} |V - \bar{V}_{x_0,\theta R}|^2 \leq C\theta^2 R^2 \int_{B(x_0,\theta R)} |\nabla V|^2 \leq C \theta^2 R^2 \, \|\nabla V\|^2_{L^\infty(B(x_0,\frac{R}{2}))}$$

$$\leq C\theta^2 R^2 \left(\frac{2}{R}\right)^{N+2} \int_{B(x_0,R)} |V - \bar{V}_{x_0,R}|^2$$

$$\leq C\theta^2 \fint_{B(x_0,R)} |V - \overline{V}_{x_0,R}|^2 .$$

Choisissons dès lors θ pour que $C\theta^2 \leq \frac{1}{2}\theta^{2\alpha}$, et venons en au cas général à coefficients variables. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite v_n de solutions de (X.3), des suites $\varepsilon_n \searrow 0$, $R_n \searrow 0$ et $x_n \in \Omega$ avec $B(x_n, R_n) \subset \Omega$ telles que

$$E(x_n, R_n, v_n) = \varepsilon_n$$

mais $E(x_n, \theta R_n, v_n) > \theta^{2\alpha} E(x_n, R_n, v_n)$.
Les fonction w_n définies sur $B(0,1)$ par

$$w_n(x) = \varepsilon_n^{-1/2}\left[v_n(x_n + R_n x) - \overline{v_n}_{x_n,R_n}\right],$$

sont solutions de

$$-\sum_{i,j,\beta} \partial_i \left(A_{ij}^{\alpha\beta}(x_n + R_n x, \varepsilon_n^{1/2} w_n(x) + \overline{v_n}_{x_n,R_n}) \, \partial_j w_n^\beta \right) = 0$$

sur $B(0,1)$. Par construction, on a aussi

$$\| w_n \|_{L^2(B(0,1))} = 1 .$$

En invoquant l'inégalité de Caccioppoli pour w_n (on utilise ici la version pour coefficients mesurables vérifiant l'hypothèse d'ellipticité forte), on peut supposer, quitte à passer à une sous-suite, que

$$w_n \longrightarrow V \quad \text{dans } L^2_{loc}(B(0,1))$$
$$\nabla w_n \longrightarrow \nabla V \quad \text{dans } L^2_{loc}(B(0,1))$$

et que

$$\varepsilon_n^{1/2} w_n \longrightarrow 0 \quad \text{p.p. sur } B(0,1),$$
$$\overline{v_n}_{x_n,R_n} \longrightarrow \overline{v} \in \mathbb{R}^m, \quad x_n \to \overline{x} \in \overline{\Omega}.$$

Par uniforme continuité de $A_{ij}^{\alpha\beta}$, on a alors

$$A_{ij}^{\alpha\beta}\left(x_n + R_n x, \varepsilon_n^{1/2} w_n(x) + \overline{v_n}_{x_n,R_n}\right) \longrightarrow B_{ij}^{\alpha\beta} \quad \text{p.p. } x \in B(0,1)$$

où les $B_{ij}^{\alpha\beta}$ vérifient la même condition d'ellipticité forte que A, de fait $B_{ij}^{\alpha\beta} = A_{ij}^{\alpha\beta}(\overline{x}, \overline{v})$.

Par passage à la limite dans les équations on obtient

$$-\sum_{i,j,\beta} \partial_i \left(B_{ij}^{\alpha\beta} \partial_j V \right) = 0 \qquad \text{sur } B(0,1)$$

tandis que de la convergence de w_n vers V dans $L^2_{loc}(B(0,1))$ on déduit que

$$\fint_{B(0,1)} |V - \overline{V}_{0,1}|^2 = \fint_{B(0,1)} |V|^2 \leq \liminf \fint_{B(0,1)} |w_n|^2 = 1$$

et que

$$\fint_{B(0,\theta)} |V - \overline{V}_{0,\theta}|^2 = \lim_{n\to+\infty} \fint_{B(0,\theta)} |w_n - \overline{w_n}_{0,\theta}|^2$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n^{-1} \fint_{B(x_n,\theta R_n)} |v_n - \overline{v_n}_{x_n,R_n}|^2$$
$$\geq \theta^{2\alpha},$$

ce qui contredit l'estimation du début de preuve ∎

<u>Corollaire X.7</u> Sous les hypothèses du Théorème X.5, avec $0 < \alpha < 1$ fixé, et ε_0 et R_0 déterminés par le Lemme X.6, si $x_0 \in \Omega$ et $0 < R < R_0$ sont tels que $B(x_0, R) \subset \Omega$ et

$$(X.4) \qquad E(x_0, R) < \varepsilon_0$$

alors v est de classe $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ sur un voisinage de x_0.

<u>Preuve du Corollaire X.7</u> Remarquons d'abord que par continuité, on déduit de (X.4) que

$$E(x, R) < \varepsilon_0$$

pour tout x dans un voisinage de x_0.
Puisque $\theta < 1$, on peut itérer l'estimation fournie par le Lemme X.6 et obtenir

$$E(x, \theta^k R) \leq \theta^{2k\alpha} E(x, R) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Par un argument déjà utilisé plus en amont dans le cours, on obtient alors

$$E(x, \rho) \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\alpha} E(x,R) \qquad \forall \rho \leq R$$

c'est-à-dire

$$\rho^{-N-2\alpha} \int_{B(x,\rho)} |v - \bar{v}_{x,\rho}|^2 \leq C(R, \alpha, \dots)$$

où C peut être choisie indépendante de x dans un voisinage de x_0. La conclusion suit du Lemme de Campanato (Lemme V.4)

Nous pouvons maintenant aborder la

Preuve du Théorème X.5

Soit $0 < \alpha < 1$ fixé et ε_0, R_0 déterminés par le Lemme X.6. On définit

$$\Omega_0 = \left\{ x \in \Omega \text{ t.q. } \inf_{\substack{R < R_0 \\ B(x,R) \subset \Omega}} E(x,R) < \varepsilon_0 \right\}.$$

L'ensemble Ω_0 est ouvert par construction et continuité de E, et de plus $v \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega_0)$ par le Corollaire X.8. Il ne reste plus qu'à obtenir une estimation de la taille de $\Omega \setminus \Omega_0$.

Posons $F_k = (\Omega \setminus \Omega_0) \cap \{ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{k} \}$.

Puisque $\Omega \setminus \Omega_0 = \bigcup_k F_k$, il nous suffit de montrer que

$$\mathcal{H}^{N-2}(F_k) = 0 .$$

Soit $0 < \delta < \min(R_0, \frac{1}{k})$. Pour chaque $y \in F_k$, on a

$$\frac{1}{\delta^N} \int_{B(y,\delta)} |v - \bar{v}_{y,\delta}|^2 \geq \varepsilon_0$$

et donc par l'inégalité de Poincaré - Wirtinger

$$\frac{1}{\delta^{N-2}} \int_{B(y,\delta)} |\nabla v|^2 \geq \frac{\varepsilon_0}{C}$$

Du recouvrement $\{ B(y, 3\delta), y \in F_k \}$ de F_k, on extrait un sous-recouvrement fini $\{ B(y_i, 5\delta), y_i \in I \}$ tel que $i \neq j \Rightarrow B(y_i,\delta) \cap B(y_j,\delta) = \emptyset$.

(il suffit pour cela de considérer par les boules $\{B(y,\delta),\, y \in F_k\}$ une sous-famille maximale de boules disjointes).

Puisque $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$(\text{X}.5) \qquad \frac{\varepsilon_0}{C}\, \delta^{N-2}\, \# I \leq \bigcup_{y_i \in I} \int_{B(y_i,\delta)} |\nabla v|^2 \leq \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

et par conséquent $\# I \leq C\, \delta^{2-N}$. Par définition et puisque $\{B(y_i; 3\delta),\, y_i \in I\}$ recouvre F_k,

$$\mathcal{H}^{N-2}_\delta(F_k) \leq \sum_{y_i \in I} (3\delta)^{N-2}$$
$$\leq \# I . (3\delta)^{N-2}$$
$$\leq C$$

En passant à la limite $\delta \searrow 0$, on a alors

$$\mathcal{H}^{N-2}(F_k) \leq C,$$

et donc $\mathcal{H}^N(F_k) = 0$, et ainsi $\mathcal{H}^N\Big(\bigcup_{y_i \in I} B(y_i; 3\delta)\Big) = o(1)$ quand $\delta \searrow 0$.

En reprenant (X 5), on obtient maintenant

$$\# I \leq C . \|v\|_{H^1(\bigcup_{y_i \in I} B(y_i, 3\delta))}$$

$$= o(1) \quad \text{qd } \delta \to 0,$$

de sorte que

$$\mathcal{H}^{N-2}(F_k) = \limsup_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}^{N-2}_\delta(F_k) = 0$$

et la démonstration est terminée.

XI Applications harmoniques à valeurs dans la sphère

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier et simplement connexe. Etant donné $g : \partial\Omega \to S^{k-1}$ régulière, le problème de minimisation

$$\min \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 , \quad u \in H^1(\Omega, S^{k-1}), \; u_{|\partial\Omega} = g \right\}$$

admet un minimiseur dès que l'ensemble des contraintes est non vide. L'équation d'Euler-Lagrange vérifiée par un minimiseur stipule que la projection orthogonale de $\Delta u(x)$ sur l'espace tangent à S^{k-1} au point $u(x)$ est nulle presque partout, i.e.

$$\Delta u(x) - \langle \Delta u(x), u(x) \rangle u(x) = 0 .$$

Puisque $\langle u(x), u(x) \rangle \equiv 1$ sur Ω, on obtient, par deux dérivation successives, que

$$2 \langle u(x), \Delta u(x) \rangle + 2 \langle \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle \equiv 0$$

et l'équation d'Euler-Lagrange se réécrit

$$\text{(XI.1)} \qquad - \Delta u_i(x) = u_i(x) \, |\nabla u(x)|^2 \qquad i = 1, \dots, k$$

à laquelle nous nous référerons comme l'équation des applications harmoniques dans les sphères.
Notons que le système (XI.1) à un sens faible pour $u \in H^1_{loc}(\Omega, S^{k-1})$, puisque le terme non linéaire, produit des fonctions bornées u_i par les fonctions

localement intégrables $|\nabla u|^2$, possède un sens dans L^1_{loc}.

Dans le même esprit que le Lemme X.6, nous avons le résultat suivant d'ε-régularité pour (XI.1) :

<u>Lemme XI.1</u> Soit $u \in H^1_{loc}(\Omega, S^{k-1})$ solution faible de (XI.1) sur Ω t.q. $u \in \mathcal{C}^0(\Omega, S^{k-1})$. Pour chaque $0 < \alpha < 1$ il existe $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$, $\varepsilon_0 > 0$ et $R_0 > 0$ tel que si $x_0 \in \Omega$, $0 < R < R_0$, $B(x_0, R) \subset \Omega$ et

$$|u|_{\mathcal{C}^{0,0}(B(x_0,R))} < \varepsilon_0$$

alors
$$E(x_0, \theta R) \leq \theta^{2\alpha} E(x_0, R)$$

où $E(y,\rho) = \displaystyle\fint_{B(y,\rho)} |u - \bar{u}_{y,\rho}|^2.$

<u>Preuve du Lemme XI.1</u> Comme pour le Lemme X.6, α étant fixé on choisit θ suffisamment petit pour que

$$C\theta^2 \leq \frac{1}{2}\theta^{2\alpha},$$

où C est une constante telle que pour toute fonction harmonique V sur $B(0,1)$ et pour tout $0 < \theta \leq 1/2$

$$\fint_{B(0,\theta)} |V - \bar{V}_{0,\theta}|^2 \leq C\theta^2 \fint_{B(0,1)} |V - \bar{V}_{0,1}|^2 .$$

Supposons ensuite par l'absurde qu'il existe une suite u_n de solutions de (XI.1), des suites $\varepsilon_n \downarrow 0$ et $R_n \downarrow 0$, $x_n \in \Omega$ avec $B(x_n, R_n) \subset \Omega$ telles que

$$|u_n|_{\mathcal{C}^{0,0}(B(x_n,R_n))} = \varepsilon_n$$

mais $E(x_n, \theta R_n, u_n) > \theta^{2\alpha} E(x_n, R_n, u_n)$.

Puisque pour chaque $x \in B(x_n, R_n)$,

$$\left| u_n(x) - \overline{u_n}_{x_n,R_n} \right| \leq |u_n|_{\mathcal{C}^{0,0}(B(x_n,R_n))}$$

on a

$$\sigma_n \equiv \fint_{B(x_n,R_n)} |u_n - \overline{u_n}_{x_n,R_n}|^2 \leq \varepsilon_n^2 .$$

Les fonctions v_n définies sur $B(0,1)$ par

$$v_n(x) = \sigma_n^{-1/2} \left[u_n(x_n + R_n x) - \overline{u_n}_{x_n,R_n} \right]$$

sont solutions de

$$(\text{XI}.2) \qquad - \Delta v_n = \left(\sigma_n v + \sigma_n^{1/2} \overline{u_n}_{x_n,R_n} \right) |\nabla v_n|^2$$

sur $B(0,1)$. Par construction, on a également

$$\fint_{B(0,1)} |v_n|^2 = 1 .$$

Nous allons obtenir une inégalité de type Caccioppoli pour (XI.2). Soit $0 < \rho < 1$ et χ une fonction plateau pour $B(0,\rho)$ dans $B(0,1)$. En multipliant (XI.2) par $\chi^2 v_n$ et en intégrant par partie on obtient

$$\int_{B(0,1)} |\nabla v_n|^2 \chi^2 \leq 2 \int_{B(0,1)} |\nabla v_n|^2 \chi^2 \left(\sigma_n |v_n|^2 + \sigma_n^{1/2} |\overline{u_n}_{x_n,R_n}| . |v_n| \right)$$
$$+ C(\chi) \int_{B(0,1)} |v_n|^2$$

Puisque $|u_n| = 1$ pp., $|\overline{u_n}_{x_n,R_n}| \leq 1$, et

d'autre par

$$|\sigma_n^{1/2} v_n|_{L^\infty(B(0,1))} \leq |u_n - \overline{u_n}_{x_n,R_n}|_{L^\infty(B(x_n,R_n))}$$

$$\leq \varepsilon_n .$$

Pour n suffisamment grand, on obtient alors

$$2 \int_{B(0,1)} |\nabla v_n|^2 \chi^1 \left(\sigma_n |v_n|^2 + \sigma_n^{1/2} |\overline{u_n}_{x_n,R_n}| |v_n| \right)$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{B(0,1)} |\nabla v_n|^2 \chi^2$$

et ensuite

$$\int_{B(0,\rho)} |\nabla v_n|^2 \leq C(\rho) .$$

Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $v_n \to V$ dans $L^2_{loc}(B(0,1))$, $\nabla v_n \rightharpoonup \nabla V$ dans $L^2_{loc}(B(0,1))$ et $\sigma_n v \to 0$ p.p.
En passant à la limite $n \to +\infty$ dans XI. 2 on vérifie que

$$-\Delta V = 0 \quad \text{sur } B(0,1),$$

$$\fint_{B(0,1)} |V - \overline{V}_{0,1}|^2 = \fint_{B(0,1)} |V|^2 \leq \liminf \fint |v_n|^2 = 1$$

mais $\displaystyle\fint_{B(0,\theta)} |V - \overline{V}_{0,\theta}|^2 = \lim_{n \to +\infty} \fint_{B(0,\theta)} |v_n - \overline{v_n}_{0,\theta}|^2$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sigma_n^{-1} \int_{B(x_n, \theta R_n)} |u_n - \bar{u}_{n_{x_n, \theta R_n}}|^2$$

$$\geq \theta^{2\alpha},$$

d'où la contradiction cherchée.

<u>Corollaire XI.2</u> Si $u \in H^1_{loc}(\Omega, S^{k-1})$ est une solution faible de (XI.1) sur Ω et que $u \in \mathcal{C}^0(\Omega, S^{k-1})$ alors $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{loc}(\Omega, S^{k-1})$ pour tout $0 < \alpha < 1$.

<u>Preuve du Corollaire XI.2</u> Il suffit de remarquer que u étant continue, elle est uniformément continue sur tout compact de Ω de sorte que la condition de petite oscillation $|u|_{\mathcal{C}^{0,0}(B(x_0,R))}$ est vérifiée en choisissant R suffisamment petit (uniformément pour x_0 dans le compact considéré). La fin de la preuve suit les lignes de celle du Corollaire X.7, en invoquant ici encore le Lemme de Campanato.

En fait, le fait que $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$ quelconque permet de conclure que $u \in \mathcal{C}^\infty$:

<u>Proposition XI.3</u> Si $u \in H^1_{loc}(\Omega, S^{k-1})$ est une solution continue de (XI.1) alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, S^{k-1})$

<u>Preuve de la Proposition XI.3</u> Par le Corollaire XI.2, $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ et par conséquent,

$$u \in W^{\alpha, p}_{loc} \quad \forall \alpha < 1, \ \forall p < +\infty$$

Comme d'autre part $u \in H^1_{loc}$, le terme non linéaire $u|\nabla u|^2 \in L^1_{loc}$ et dès lors la théorie de la régularité sur le Laplacien nous assure que

$$u \in W^{s,1}_{loc}, \quad \forall s < 2.$$

Par interpolation en $W^{\frac{3}{2},1}_{loc}$ et $W^{\alpha,p}_{loc}$, en choisissant α et p suffisamment proches de 1 et $+\infty$ on obtient

$$u \in W^{1,q}_{loc} \quad \forall q < +\infty.$$

En conséquence, $u|\nabla u|^2 \in L^r_{loc}$ $\forall r < +\infty$ et donc $u \in W^{2,r}_{loc}$ $\forall r < +\infty$. Par injection de Sobolev on obtient $u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}$ $\forall 0 < \alpha < 1$. D'autre part, si $u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{loc}$ avec $k \geq 1$, on a $u|\nabla u|^2 \in \mathcal{C}^{k-1,\alpha}_{loc}$ et la théorie Höldérienne pour le Laplacien assure que $u \in \mathcal{C}^{k+1,\alpha}_{loc}$. Ceci termine la preuve.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons montrer un résultat important de Hélein qui affirme qu'en dimension 2 d'espace, toute application harmonique $u \in H^1(\Omega, S^{k-1})$ est continue, et par conséquent indéfiniment dérivable en vertu de la Proposition XI.3.

Commençons par le

<u>Lemme XI.4</u> Soit $u \in H^1(\Omega, S^{k-1})$ solution de (XI.1), alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(B(0,1), \mathbb{R})$, $\forall y \in \Omega$ et $\forall \varepsilon > 0$ t.q. $B(y, \varepsilon) \subset \Omega$, en posant

$$\varphi_{\varepsilon, y}(x) = \varepsilon^{-N} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$$

on a

$$\int_{\{dist(y,\partial\Omega) \geq \varepsilon\}} \left| \int u_i(x) |\nabla u|^2(x)\, \varphi_{\varepsilon y}(x)\, dx \right| dy \leq C \|\nabla \varphi\|_\infty \cdot \|u\|_{H^1}^2$$

où C ne dépend pas de ε.

<u>Preuve du Lemme XI.4</u> Puisque $|u(x)|^2 = 1$ p.p., on a

$$\sum_{j=1}^{k} u_j \nabla u_j = 0$$

et donc

$$u_i |\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^{k} u_i \nabla u_j \cdot \nabla u_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (u_i \nabla u_j - u_j \nabla u_i) \nabla u_j .$$

D'autre part, pour chaque (i,j) on a

$$\operatorname{div}(u_i \nabla u_j - u_j \nabla u_i) = \sum_{l=1}^{N} \partial_l (u_i \partial_l u_j - u_j \partial_l u_i)$$

$$= \sum_{l=1}^{N} (u_i \partial_l^2 u_j - u_j \partial_l^2 u_i) = u_i u_j |\nabla u|^2 - u_j u_i |\nabla u|^2$$

$$= 0 .$$

Pour $1 \leq j \leq k$ fixé on obtient alors, par la formule de Stokes, et en posant $v_{ij} = u_i \nabla u_j - u_j \nabla u_i$

$$\left|\int_\Omega v_{ij}(x)\nabla u_j(x)\varphi_{\varepsilon y}(x)\,dx\right| = \left|\int_\Omega v_{ij}(x)\nabla(u_j - \overline{u_j}_{y,\varepsilon})\varphi_{\varepsilon y}(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_\Omega v_{ij}(x)\left(u_j(x) - \overline{u_j}_{y,\varepsilon}\right)\nabla\varphi_{\varepsilon y}(x)\,dx\right|$$

$$\leq C\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\,\varepsilon^{-1-N}\int_{B(y,\varepsilon)} |v_{ij}(x)|\,.\,|u_j(x) - \overline{u_j}_{y,\varepsilon}|\,dx\,.$$

Soit $2 < p < 2^*$ fixé et $q = p'$, par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int_{B(y,\varepsilon)} |v_{ij}(x)|\,|u_j(x) - \overline{u_j}_{y,\varepsilon}|\,dx \leq \left(\int_{B(y,\varepsilon)} |v_{ij}(x)|^q\right)^{1/q}.\left(\int_{B(y,\varepsilon)} |u_j(x) - \overline{u}_{j_{y,\varepsilon}}|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq C\left(\int_{B(y,\varepsilon)} |v_{ij}(x)|^q\right)^{1/q}.\left(\int_{B(y,\varepsilon)} |\nabla u_j|^r\right)^{1/r}$$

où $r^* = p$ et C est la meilleure constante pour l'injection de $W^{1,r}$ (à moyenne nulle) dans L^p, qui ne dépend pas de ε par invariance par changement d'échelle.

Notons que $1 < q, r < 2$ et que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{n+1}{n}$

de sorte que

$$C\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\,\varepsilon^{-1-N}\int_{B(y,\varepsilon)} |v_{ij}(x)|\,.\,|u_j(x) - \overline{u}_{i_{y,\varepsilon}}|\,dx$$

$$\leq C\|\nabla\varphi\|_\infty\left(\fint_{B(y,\varepsilon)} |v_{ij}(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\left(\fint_{B(y,\varepsilon)} |\nabla u_j|^r\right)^{1/r}$$

$$\leq C\|\nabla\varphi\|_\infty\left[\left(\fint_{B(y,\varepsilon)} |v_{ij}|^q\right)^{2/q} + \left(\fint_{B(y,\varepsilon)} |\nabla u_j|^r\right)^{2/r}\right]$$

Par le théorème maximal,

$$\int_{\{dist(y,\partial\Omega)\geq\varepsilon\}} \left(\fint_{B(y,\varepsilon)} |v_{ij}|^q \right)^{2/q} dy \leq C_q \int_{\{dist(y,\partial\Omega)\geq\varepsilon\}} \left(|v_{ij}|^q(y) \right)^{2/q} dy$$

$$= C \int_{\{dist(y,\partial\Omega)\}} |v_{ij}|^2(y)\, dy \leq C_q \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\int_{\{dist(y,\partial\Omega)\geq\varepsilon\}} \left(\fint_{B(y,\varepsilon)} |\nabla u_j|^r \right)^{2/r} dy \leq C_r \int_{\{dist(y,\partial\Omega)\geq\varepsilon\}} \left(|\nabla u_j|^r(y) \right)^{2/r} dy$$

$$\leq C_r \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

La conclusion suit.

<u>Remarque</u> 1) La preuve ci-dessus montre qu'on a même

$$\int_K \sup_{\varepsilon<\varepsilon_0} \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{D}(B(0,1),\mathbb{R}) \\ \|\nabla\varphi\|_\infty\leq 1}} \left| \int u_i |\nabla u|^2 \varphi_{\varepsilon,y}(x)\, dx \right| dy \leq C \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

quel que soit $K \subset \Omega$ compact et $\varepsilon_0 < dist(K, \partial\Omega)$.

2) La preuve ci-dessus montre également que le produit $v \nabla u$ avec $v \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à divergence nulle et $u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dans l'espace de Hardy $h^1(\mathbb{R}^N)$, avec

$$h^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ t.q. } \mathcal{G}f \in L^1(\mathbb{R}^N) \right\}$$

avec

$$\mathcal{G}f(y) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(B(0,1),\mathbb{R}) \\ \|\nabla\varphi\|_\infty \leq 1 \\ \varepsilon > 0}} \left| \int_{B(y,\varepsilon)} f(x)\, \varphi_{\varepsilon y}(x)\, dx \right| .$$

Pour estimer la régularité de u en dimension $N = 2$, nous allons estimer le produit de convolution

$$\int_\Omega (u_i \nabla u_j - u_j \nabla u_i)(x)\, \nabla u_j(x) \log|x-y|\, dx ,$$

puisqu'il correspond au potentiel Newtonien du terme non linéaire. On décompose le logarithme comme

<u>Lemme XI.5</u> Soit χ une fonction plateau pour $B(0,1)$ dans $B(0,2)$. Alors pour chaque $R > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ il existe $C(R,n_0) < +\infty$ telle que pour tout $x \in B(0,R)$

$$\left| \log(x) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \chi(e^n x) \right| \leq C(R,n_0) .$$

<u>Lemme XI.6</u> Soit $y \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$ t.q. $B(y, 2e^{-n}) \subset \Omega$, alors pour $f \in L^1(\Omega)$

$$\int_\Omega f(x)\, \chi\left(\frac{x-y}{e^{-n}}\right) dx$$

$$\leq C\, e^{-nN} . \inf_{z \in B(y, e^{-n})} \mathcal{G}f(z)$$

$$\leq C \int_{B(y,e^{-n}) \setminus B(y, e^{-(n+1)})} \mathcal{G}f(z)\, dz$$

Preuve du Lemme XI.6

Si $z \in B(y, e^{-n})$,

$$\int_\Omega f(x)\,\chi\left(\frac{x-y}{e^{-n}}\right)dx = \int_\Omega f(x)\,\bar{\chi}\left(\frac{x-z}{4e^{-n}}\right)dx$$

pour $\bar{\chi} \in \mathcal{D}(B(0,1),\mathbb{R})$, $\|\nabla \bar{\chi}\| \leq 1$. La conclusion suit.

Corollaire XI.7 Pour $K \subset \Omega$ compact et $y \in K$,

$$\left| \int_\Omega (u_i \nabla u_j - u_j \nabla u_i)(x)\, \nabla u_j(x) \log|x-y|\, dx \right|$$

$$\leq C(K)\, \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Preuve du Corollaire XI.7

Par le Lemme précédent on obtient

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \int_\Omega (u_i \nabla u_j - u_j \nabla u_i)(x)\, \nabla u_j(x)\, \chi\left(e^{n}(x-y)\right) dx \right|$$

$$\leq C \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{B(y,e^{-n})\setminus B(y,e^{-(n+1)})} \mathcal{Y}\left[(u_i \nabla u_j - u_j \nabla u_i)\nabla u_j\right] dx$$

$$\leq C_K \int_K \mathcal{Y}\left[(u_i \nabla u_j - u_j \nabla u_i)\nabla u_j\right] dx$$

$$\leq C_K \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

où on a utilisé le Lemme XI.4 pour la dernière inégalité.

D'autre part,

$$\int_\Omega \left| (u_i \nabla u_j - u_j \nabla u_i)(x)\, \nabla u_j(x) \right| dx \leq C \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

et la conclusion suit du Lemme XI.5 ∎

Corollaire XI. 8 On a

$$u|\nabla u|^2 * \frac{1}{2\pi}\log \in \mathcal{C}^0(\Omega)$$

(on considère que $u|\nabla u|^2$ est prolongée par 0 en dehors de Ω).

Preuve du Corollaire XI. 8

Par le Corollaire XI. 7 on sait déjà que $u|\nabla u|^2 * \frac{1}{2\pi}\log$ est une fonction localement bornée sur Ω.
D'autre part, si τ_h désigne l'opérateur de décalage $\tau_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, alors

$$\tau_h\Big((u_i\nabla u_j - u_j\nabla u_i)\nabla u_j\Big)(x)$$

$$= \tau_h\big(u_i\nabla u_j - u_j\nabla u_i\big)(x)\,\nabla u_j(x+h)$$

$$+ \big(u_i\nabla u_j - u_j\nabla u_i\big)(x)\,\tau_h\nabla u_j(x).$$

La continuité des translations dans L^2 assure que

$$\begin{cases} \tau_h\big(u_i\nabla u_j - u_j\nabla u_i\big) \xrightarrow{L^2} 0 \quad \text{qd } h\to 0 \\ \tau_h\nabla u_j \xrightarrow{L^2} 0 \quad \text{qd } h\to 0 \end{cases}$$

et on a, pour $K\subset\Omega$ compact et $y\in K$

$$\left|\int_\Omega \tau_h(u_i\nabla u_j - u_j\nabla u_i)(x)\,\nabla u_j(x+h)\log|x-y|\,dx\right| \le C(K)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\tau_h(u_i\nabla u_j - u_j\nabla u_i)\|_{L^2}$$

$$\to 0 \quad \text{qd } h\to 0,$$

et de même pour

$\left|\int_\Omega (u_i\nabla u_j - u_j\nabla u_i)(x)\,\tau_h\nabla u_j(x)\log|x-y|\right|$. La conclusion.

Nous pouvons finalement énoncer le

<u>Théorème XI. 9</u> (Hélein) Si $N = 2$ et $u \in H^1(\Omega, S^{k-1})$ vérifie

$$-\Delta u = u |\nabla u|^2 \quad \text{sur } \Omega$$

alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

<u>Preuve du Théorème XI. 9</u>

Il suffit de remarquer que

$$u = u|\nabla u|^2 * \frac{1}{2\pi} \log + H$$

avec H harmonique sur Ω. La conclusion suit du Corollaire XI. 8 et du Théorème I. 1 ∎