Eléments de correction
Cours A1-4 Ensta
Calcul parallèle
et méthodes de décomposition de domaine
Examen du 3 Janvier 2017. Durée : 2h et 30mn.

F. Nataf

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

1 Questions de cours (sans document)

a) Méthodes de Schwarz

1. Rappeler la définition de la méthode de Schwarz ($\simeq$ 1870) pour une décomposition en deux sous-domaines avec recouvrement :
   définition de l'algorithme originel séquentiel et de sa variante parallèle ;
2. Rappeler la définition de la méthode RAS (Restricted Additive Schwarz) ;
3. Rappeler l'équivalent continu (c.à.d. au niveau des équations aux dérivées partielles) de la méthode RAS ;
4. Rappeler et démontrer l'équivalence vue en cours entre la méthode ci-dessus (RAS au niveau continu) et la méthode de Schwarz ($\simeq$ 1870).

b) Enoncer, sans le démontrer, le lemme de l'espace fictif (Fictitious Space Lemma)

2 Equation de convection-diffusion (avec documents mais sans appareil électronique)

Soient deux réels ν, $a > 0$. On considère l'opérateur

$$\mathcal{L}(u) := a\,\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u)\,,$$

et le problème

$$\mathcal{L}(u) = f \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ et } u \text{ tend vers 0 à l'infini,}$$

où f est une fonction donnée. Le domaine $\mathbb{R}^2$ est décomposé en deux demi plans : $\Omega_1 =]-\infty, 0[\times\mathbb{R}$ et $\Omega_2 =]0,\infty[\times\mathbb{R}$. On note $\Gamma = \{0\}\times\mathbb{R}$ la frontière commune entre les sous-domaines. Soient deux réels α_1, α_2, on considère l'algorithme suivant $(1 \leq i, j \leq 2,\ i \neq j)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(u_i^{n+1}) &= f \qquad \text{dans} \quad \Omega_i, \quad i = 1,2 \\
\nu \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_i} + \alpha_i u_i^{n+1} &= -\nu \frac{\partial u_j^n}{\partial n_j} + \alpha_i u_j^n \qquad \text{sur} \quad \Gamma,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

où n_i est la normale extérieure au domaine Ω_i. On impose $\alpha_2 = \alpha_1 + a$.

1. A l'aide de la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$, calculer le taux de convergence du k-ième mode de Fourier de l'erreur.

   Réponse *Le calcul est très semblable à celui fait en cours pour le problème symétrique. L'erreur e_1^n vérifie l'algorithme de Schwarz avec $f = 0$. Après passage en Fourier dans la direction y, on a*

   $$a \frac{\partial \hat{e}_1^{n+1}}{\partial x} - \nu(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2)(e_1^{n+1}) = 0\,.$$

   La recherche de solutions particulières du type $\exp(\lambda(k)x)$ *conduit à deux valeurs possibles pour :*

   $$\lambda^+ = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4\,\nu^2\,k^2}}{2\nu} > 0 \ \textit{et}\ \lambda^- = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4\,\nu^2\,k^2}}{2\nu} \leq 0\,.$$

   La solution dans le domaine 1 doit être bornée quand x tend vers $-\infty$ et cela élimine la branche $\exp(\lambda^-(k)\,x)$. *Ainsi, il existe $\beta_1^{n,+}$ tel que*

   $$e_1^{n+1}(x,k) = \beta_1^{n,+}(k) \exp(\lambda^+(k)\,x)\,.$$

   Par analogie, dans le sous domaine 2, on a l'existence de $\beta_2^{n,-}$ tel que :

   $$e_2^{n+1}(x,k) = \beta_2^{n,-}(k) \exp(\lambda^-(k)\,x)\,.$$

   Les conditions d'interface donnent :

   $$(\nu\lambda^+ + \alpha_1)\beta_1^{n+1,+} = (\nu\lambda^- + \alpha_1)\beta_2^{n,-} \ \textit{et}\ (-\nu\lambda^- + \alpha_2)\beta_2^{n1+,-} = (-\nu\lambda^+ + \alpha_2)\beta_1^{n,+}\,.$$

   Par analogie avec le cours, on pose :

   $$\rho^2(k) = \frac{\nu\lambda^- + \alpha_1}{\nu\lambda^+ + \alpha_1} \times \frac{-\nu\lambda^+ + \alpha_2}{-\nu\lambda^- + \alpha_2} = \left| \frac{a/2 + \alpha_1 - \sqrt{a^2 + 4\,\nu^2\,k^2}}{a/2 + \alpha_1 + \sqrt{a^2 + 4\,\nu^2\,k^2}} \right|^2\,,$$

   et on a :

   $$\beta_1^{n+1,+} = \rho^2(k)\beta_1^{n-1,+}\,.$$

   ■

2. Donner une condition sur α_1 qui assure la convergence de l'algorithme pour tous les nombres de Fourier ?

   Réponse *La convergence est assurée pour tout k si et seulement si $a/2 + \alpha_1 > 0$.* ■

3 Equation de convection-diffusion et super convergence (avec documents mais sans appareil électronique)

Soient L, $a\,\nu > 0$, on considère l'équation de convection-diffusion en dimension un d'espace posé sur l'intervalle $]0,\, L[$:

$$\begin{array}{l} a\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \text{ dans }]0,\, L[\\ u(0) = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L) = 0\,. \end{array}$$

Soient deux réels L_1 et l_2 tels que $0 < l_2 \leq L_1 < L$, répondre aux questions suivantes :

1. Définir les opérateurs Dirichlet to Neumann associés aux intervalles $]L_1,\, L[$ et $]0, l_2[$.

   Réponse

$$\begin{array}{rcl} DtN_{]L_1,\,L[} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & -\frac{\partial v}{\partial x}(L_1) \end{array}$$

   où $v :]L_1\,,\, L[\to \mathbb{R}$ *est solution de :*

$$a\frac{\partial v}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \;\; v(L_1) = g \;\; et \;\; \frac{\partial v}{\partial x}(L) = 0$$

   et

$$\begin{array}{rcl} DtN_{]0,\,l_2[} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \frac{\partial v}{\partial x}(l_2) \end{array}$$

   où $v :]0\,,\, l_2[\to \mathbb{R}$ *est solution de :*

$$a\frac{\partial v}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \;\; v(0) = 0 \;\; et \;\; v(l_2) = g\,.$$

   ■

2. Calculer ces deux opérateurs.
3. A partir des questions précédentes, proposer une méthode de décomposition de domaine qui converge en deux itérations pour l'intervalle $]0,\, L[$ décomposé en les deux sous domaines : $]0,\, L_1[$ et $]l_2,\, L[$.

   Réponse *On note* $\mathcal{L} := a\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. *L'algorithme s'écrit :*

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}(u_1^{n+1}) = f \;\; pour \;\; 0 < x < L_1\,, \\ u_1^{n+1}(0) = 0\,, \\ (\frac{\partial}{\partial x} + DtN_{]L_1,\,L[})(u_1^{n+1}) = (\frac{\partial}{\partial x} + DtN_{]L_1,\,L[})(u_1^n) \;\; en \;\; x = L_1 \end{array}$$

   et

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}(u_2^{n+1}) = f \;\; pour \;\; l_2 < x < L\,, \\ \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial x}(L) = 0\,, \\ (-\frac{\partial}{\partial x} + DtN_{]0,\,l_2[})(u_2^{n+1}) = (-\frac{\partial}{\partial x} + DtN_{]0,\,l_2[})(u_2^n) \;\; en \;\; x = l_2 \end{array}$$

   ■

4. Vérifier par le calcul que la méthode que vous proposez converge effectivement en deux itérations.

4 Problème (avec documents mais sans appareil électronique)

Le problème discrétisé sera noté sous la forme

$$Ax = F \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{N}}$$

avec A une matrice symétrique définie positive et $\mathcal{N}$ est l'ensemble des degrés de liberté.

Le but de ce problème est d'étudier l'algorithme qui, au niveau continu, consiste à modifier l'algorithme de Schwarz en remplaçant les conditions d'interface de Dirichlet par d'autres conditions d'interface, souvent de types Robin (méthode de P.L. Lions). Pour traiter le problème, il suffit de savoir que cela revient à introduire pour chaque sous domaine i une matrice B_i différente de la matrice $R_i\, A\, R_i^T$. La matrice B_i est supposée symétrique définie positive. Comme dans le cours, la matrice R_i est la matrice de restriction de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}_i$ où $\mathcal{N}_i$ est l'ensemble des degrés de liberté du sous-maillage i.

On rappelle aussi la notion de partition de l'unité, définie comme dans le cours par

$$\sum_{i=1}^{N} R_i^T\, D_i\, R_i = I_d\,.$$

On étudie le préconditionneur suivant :

$$M^{-1} = \sum_{i=1}^{N} R_i^T B_i^{-1} R_i\,. \tag{2}$$

1. Modifier la reformulation de la méthode de Schwarz

$$M_{ASM}^{-1} := \sum_{i=1}^{N} R_i^T (R_i\, A\, R_i^T)^{-1} R_i$$

pour faire rentrer le préconditionneur M^{-1} (équation (2)) dans le cadre du lemme de l'espace fictif (fictitious space lemma).

Réponse *Il suffit de modifier la définition de la forme bilinéaire b en :*

$$\begin{array}{rcl} b : H_D \times H_D & \to & \mathbb{R} \\ (\mathbf{U}_i)_{1\le i\le N} & \mapsto & \sum_{i=1}^{N} (B_i\, \mathbf{U}_i\,,\, \mathbf{U}_i)\,. \end{array}$$

■

2. On définit

$$k_0 := \max_{1\le i\le N} \#\{j | R_j A R_i^T \neq 0\} \tag{3}$$

et

$$\gamma := \max_{1\le i\le N} \max_{\mathbf{U}_i \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{N}_i}\setminus\{0\}} \frac{(A\, R_i^T \mathbf{U}_i, R_i^T \mathbf{U}_i)}{(B_i \mathbf{U}_i,\, \mathbf{U}_i)}\,. \tag{4}$$

Par application du lemme de l'espace fictif, montrer que la plus grande valeur propre du système préconditionné $M^{-1}\, A$ est majorée par $k_0\, \gamma$.

Réponse *On a les majorations suivantes où la première inégalité a été prouvée en cours pour la méthode de Schwarz additive :*

$$\begin{array}{rcl} a(\mathcal{R}u\,,\,\mathcal{R}u) & \leq & k_0 \sum_{i=1}^N (A\,R_i^T\mathbf{U}_i\,,\,R_i^T\mathbf{U}_i) \\ & = & k_0 \sum_{i=1}^N \frac{(A\,R_i^T\mathbf{U}_i\,,\,R_i^T\mathbf{U}_i)}{(B_i\mathbf{U}_i,\,\mathbf{U}_i)}\,(B_i\mathbf{U}_i,\,\mathbf{U}_i) \\ & \leq & k_0\,\gamma \sum_{i=1}^N (B_i\mathbf{U}_i,\,\mathbf{U}_i) \end{array}$$

■

3. Pour introduire un préconditionneur dont la plus grande valeur propre du système préconditioné est contrôlée par construction, on ajoute une étape supplémentaire à l'algorithme sous forme d'une correction d'espace grossier. On note $\tau > 0$ un réel fixé à l'avance.
Pour chaque sous domaine i, on introduit le problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\begin{gathered} \text{Trouver } (\mathbf{U}_{ik}, \mu_{ik}) \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{N}_i} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \text{ tel que} \\ R_i A R_i^T \mathbf{U}_{ik} = \mu_{ik} B_i\,\mathbf{U}_{ik}\ \ . \end{gathered} \tag{5}$$

Définir une méthode à deux niveaux notée M_{HSM}^{-1} qui garantissent que la plus grande valeur propre de $M_{HSM}^{-1}A$ est majorée par $\max(1, \tau k_0)$.
Réponse *On note*

$$W_i := \mathit{Vect}\{\mathbf{U}_{ik}\,|\,\mu_{ik} > \tau\}$$

On introduit l'espace grossier H_0 comme étant l'espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(R_i^T\,D_i\,\mathbf{U}_{ik})_{\mu_{ik}>\tau\,,1\leq i\leq N}$ correspondant aux valeurs propres plus grandes que τ. On note R_0^T une matrice dont les vecteurs colonnes forment une base de H_0 et P_0 la projection A-orthogonal sur H_0. On note M_{HSM}^{-1} le préconditionneur à deux niveaux défini par :

$$M_{HSM}^{-1} := R_0^T (R_0 A R_0^T)^{-1} R_0 + (I_d - P_0)\,M^{-1}(I_d - P_0^T)\,.$$

■

Justifier votre réponse.
Réponse *On note*

$$\boxed{\xi_i \text{ la projection de } \mathbb{R}^{\mathcal{N}_i} \text{ sur } W_i \text{ parallèlement à } \mathit{Vect}\{\mathbf{U}_{ik}\,|\,\mu_{ik} \leq \tau\}\,.}$$

On utilise le lemme suivant admis en cours :

Lemma 4.1 *Pour tout sous domaine $1 \leq i \leq N$ et $\mathbf{U}_i \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{N}_i}$, on a :*

$$\big(R_i^T(I_d - \xi_i)\mathbf{U}_i\big)^T\,A\,R_i^T(I_d - \xi_i)\mathbf{U}_i) \leq \tau\ \mathbf{U}_i^T B_i \mathbf{U}_i\,. \tag{6}$$

■