Méthodes de décomposition de domaines
TP
Minimisation sous contrainte

F. Nataf

9 Janvier 2018

1 Introduction

Nous allons voir dans ce TP comment :
— imposer une contrainte par une méthode de pénalisation
— approcher une contrainte par une méthode de pénalisation
— paralléliser le code écrit
— passer le code de la dimension 2 à la dimension 3
Dans la suite du TP, nous considérons le problème contraint suivant :

$$\text{Minimiser}_{\{u \in H_0^1(\Omega) \mid \int_{\mathcal{C}} u = 0\}} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f\, u\,. \tag{1}$$

Ce problème a en fait deux contraintes de types différents. La première est une condition de Dirichlet sur la frontière de Ω et sera traitée par la méthode de pénalisation interne à FreeFem++ via le mot clé on. La deuxième porte sur la nullité de la moyenne de la solution sur une frontière interne notée $\mathcal{C}$.

2 Multiplicateur de Lagrange

De manière classique, on introduit le Lagrangien $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$:

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f\, u\, + \lambda \int_{\mathcal{C}} u\,.$$

Les conditions d'optimalité permettent de reformuler le problème sous la forme suivante :
Trouver $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - f\, v + \lambda \int_{\mathcal{C}} v = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,, \\ &\int_{\mathcal{C}} u = 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

On discrétise ces relations par une méthode d'éléments finis :
Trouver $(u_h, \lambda_h) \in V_{h_0} \times \mathbf{R}$ tel que :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h - f\, v_h + \lambda_h \int_\mathcal{C} v_h = 0 \quad \forall v_h \in V_{h_0}\,, \\
&\int_\mathcal{C} u_h = 0\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Au niveau matriciel, le problème prend la forme suivante :
Trouver $(\mathbf{u}, \lambda) \in \mathbf{R}^{\dim V_h} \times \mathbf{R}$ tel que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

où

— $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{\dim V_h \times \dim V_h}$ est la matrice de rigidité associée à la formulation du problème sans la contrainte de moyenne nulle,

— $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^{\dim V_h}$ est le vecteur associé à la forme linéaire $v_h \longrightarrow \int_\Omega f v_h$,

— $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{\dim V_h}$ est le vecteur associé à la forme linéaire $v_h \longrightarrow \int_\mathcal{C} v_h$.

On peut inverser le système symétrique mais non positif (4) par une méthode directe.

On peut aussi se ramener à la résolution de deux systèmes linéaires avec la matrice symétrique définie positive $\mathbf{K}$:

— calcul de λ par élimination de $\mathbf{u}$: $(\mathbf{b}^T\, \mathbf{K}^{-1}\, \mathbf{b})\, \lambda = (\mathbf{b}^T\, \mathbf{K}^{-1}\, \mathbf{f})\,,$

— suivie du calcul de $\mathbf{u}$ avec la valeur de λ calculée juste avant.

Le but du TP est de mettre en oeuvre cette méthode via FreeFem++ interfacé avec les méthodes de décomposition de domaines de la librairie HPDDM.