Partiel 1: Comparaison EF/DF
MM031: Informatique Scientifique

I. Danaila, F. Hecht, O. Pironneau

2 mars 2009

1 Partie théorique (1 heure)

Le but est d'utiliser de resoudre l'équation de la Chaleur stationnaire dans 2 matériaux de conductivité thermique différentes collé.

Nous avons donc deux domaine 1d défini par les deux intervalles adjacent $\Omega_1 =]a, b[$ et $\Omega_2 =]b, c[$, et telle que $b = (a+b)/2$. L'équation de chaleur dans chaque domaine est donné par le probléme suivant :

Trouver u le champs de température sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$ tel que

$$\left.\begin{array}{lll} K_1 u'' & = f_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ K_2 u'' & = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{array}\right\} \tag{1}$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions données et où K_1 et K_2 sont deux constantes données strictement positives. données.

Les conditions aux limites sont en :

- **a :** la temperture u est donné et est égale à u_a,
- **b :** u est continue et le flux thermique $K_i u'$ est continue, c'est-à-dire que que $K_1 u'$ à gauche est égal à $K_2 u'$ à droite en b,
- **c :** le flux thermique est nulle, $K_2 u' = 1$

Notation : l'ouvert Ω est égal à $]a, c[$, la fonction réelle discontinue K est telle que $K = K_i$ sur Ω_i pour $i = 1, 2$, et la fonction f est telle que $f = f_i$ sur Ω_i pour $i = 1, 2$.

Q1) Montrer que le problème est bien posé pour une solution $\mathcal{C}^0(\Omega)$ et $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\Omega_i, i = 1, 2$.

Q2) En supposant connue la température en b et égal à u_b, écrire les deux formulations variationnelles du probleme sur les deux domaines Ω_i , $i = 1, 2$

Q3) En déduire que la formulation variationnelle suivante est la formulation du problème global : Trouver $u \in H^1(\Omega)$, avec $u(a) = u_a$ tel que

$$\forall v \in V_0, \qquad \int_a^c K u' v' \, \mathrm{d}x = \int_a^c f v \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

où $V_0 = \{v \in H^1(\Omega), v(a) = 0\}$.

Q4) Montrez que le problème de la question Q3 est bien posé.

Q5) On discrétise le probleme global par la méthode des éléments finis P_1 Lagrange, avec un maillage uniforme de pas $h = (c - a)/N$ avec N pair pour que chaque élément K soit contenue soit dans Ω_1 ou dans Ω_2. Ecrire le système linéaire à résoudre dans le cas ou f_1 et f_2 sont des constantes.

Q6) Ecrire un schéma au différence fini avec un pas uniforme avec nombre de pas N pair, pour résoudre le problème global. Ce schema doit être constitant à l'ordre 2.

Q7) Donnez une estimation d'erreur en semi norme H_1 pour la méthode des éléments finis P_1 Lagrange dans le cas où f_1 et f_2 sont des constantes en fonction du pas de maillage .