EXAMEN DU 9 JANVIER 2017
"THÉORIE DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION"

QUESTIONS DE COURS

1) Énoncer et démontrer le théorème d'unicité pour les équations de transport (le théorème 1.4.3 page 17 des notes de cours).

2) Énoncer et démontrer le théorème de Fujita-Kato (le théorème 4.2.1 page 52 et sa démonstration des notes de cours).

Problème

Préliminaire

Le but du problème est d'étudier dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ l'équation

$$(\widetilde{NS}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u - \dfrac{1}{\varepsilon}\nabla \operatorname{div} u + u\cdot\nabla u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \quad et \quad u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

où $u = (u^1, u^2)$ désigne un champ de vecteurs dépendant du temps, Δ l'opérateur de Laplace $\partial_1^2 + \partial_2^2$, ∇ le gradient et div l'opérateur de divergence. Ici, ε est un paramètre réel qui doit être pensé comme étant "petit".

On note $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} (H_0^1(\Omega))^2$, $\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} (L^2(\Omega))^2$ et $\mathcal{V}' \stackrel{\text{def}}{=} (H^{-1}(\Omega))^2$.

P1) Justifier l'existence d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{V}$ et d'une suite croissante de réels strictement positifs $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
— $-\Delta e_n = \lambda_n^2 e_n$,
— $(\lambda_n e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une base hilbertienne de $\mathcal{V}$,
— $(\lambda_n^{-1} e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une base hilbertienne de $\mathcal{V}'$.

On désignera par $\mathcal{H}_N$ l'espace vectoriel engentré par les vecteurs $e_0, \cdots, e_N$ et l'on désignera par P_N la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_N$.

P2) Démontrer que, pour tout couple (u, v) de champs de vecteurs de $\mathcal{V}$, on a

$$\langle \nabla \operatorname{div} u, v\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{2} \langle \partial_j \operatorname{div} u, v^j\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} = -\big(\operatorname{div} u | \operatorname{div} v\big)_{L^2}.$$

P3) Démontrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout champ de vecteurs u de $\mathcal{V}$ et pour tout réel strictement positif ε, on ait

$$\sum_{1\le j,k\le 2} \int_\Omega u^k(x)\partial_k u^j(x) u^j(x)dx \le \frac{1}{2\varepsilon}\|\operatorname{div} u\|_{L^2}^2 + C\varepsilon \|u\|_{L^2}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Le but du problème est de démonter l'existence d'une solution globale lorsque ε est assez petit.

1) Dans l'esprit de la définition d'une solution faible pour le système de Leray ou pour l'équation de Schrödinger, définir une notion de solution faible pour le système $(\widetilde{NS}_\varepsilon)$.

2) Démontrer que, pour tout entier N et tout réel strictement positif ε,

$$(\widetilde{NS}_{\varepsilon,N}) \quad \begin{cases} \partial_t u_N - \Delta u_N - \dfrac{1}{\varepsilon} P_N \nabla \operatorname{div} u_N + P_N(u_N\cdot\nabla u_N) = 0 \\ u_{N|t=0} = P_N u_0 \end{cases}$$

définit une équation différentielle ordinaire sur $\mathcal{H}_N$.

3) Calculer $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|u_N(t)\|_{L^2}^2$.

TSVP

4) En déduire l'existence d'une constante strictement positive c telle que, si

$$(P) \quad \varepsilon \|u_0\|_{L^2}^2 \leq c,$$

alors on a

$$\frac{d}{dt}\|u_N(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_N(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\operatorname{div} u_N\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

On suppose dorénavant que l'hypothèse (P) est satisfaite

5) En déduite que l'équation différentielle ordinaire $(\widetilde{NS}_{\varepsilon,N})$ admet une solution globale.

6) Expliquer le plan d'une démonstration qui permette de démontrer l'existence d'une solution faible globale du système $(\widetilde{NS}_{\varepsilon})$.

7) La solution ainsi construite est-elle unique ?