EXAMEN DU 8 JANVIER 2014
"THÉORIE DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION"

QUESTIONS DE COURS

1) Énoncer et démontrer les inclusions de Sobolev des espaces $H^s(\mathbf{R}^d)$ dans les espaces $L^p(\mathbf{R}^d)$.

2) Énoncer et démontrer le théorème donnant une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour les solutions de l'équation de Navier-Stokes dans un domaine borné tridimensionnel

3) Démontrer que si $\mathcal{C}$ est une couronne et B une boule, il existe une constante C telle que pour tout entier k positif et pour tout couple (a, b) de réels tels que $b \geq a \geq 1$ on ait, pour toute fonction u de L^a,

$$\text{Supp } \widehat{u} \subset \lambda B \Rightarrow \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^b} \leq C^{k+1} \lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \|u\|_{L^a};$$

$$\text{Supp } \widehat{u} \subset \lambda \mathcal{C} \Rightarrow C^{-k-1} \lambda^k \|u\|_{L^a} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \leq C^{k+1} \lambda^k \|u\|_{L^a}.$$

Problème

Le but du problème est d'étudier dans $\mathbf{R}^2$ l'équation

$$(NLS_3) \begin{cases} i\partial_t u - \dfrac{1}{2}\Delta u = P_3(u, \overline{u}) \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

où P_3 désigne un polynôme homogène de degré 3 en $(u, \overline{u})$. On se propsoe de dḿeontrer le résultat suivant. Soient u et v deux solutions globales quelconques (pas nécessairement petites) de (NLS_3) associées respectivement aux données intiales (en $t=0$) u_0 et v_0 qui appartiennent à l'espace

$$\mathcal{E} := C(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^2) \cap L^3(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^2)).$$

On se propose de démontrer que si le réel positif Λ est assez grand, alors la fonction

$$w_{0,\Lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} u_0 + \Lambda^{-1} v_0(\Lambda^{-1}x)$$

génère une solution globale de (NLS_3) appartenant à l'espace $\mathcal{E}$.

1) Démontrer que pour toute fonction w_0 dans $L^2(\mathbf{R}^2)$, la solution de l'équation de Sh ger linéaire $e^{it\Delta}w_0$ avec donné intiale w_0 en 0 vérifie

$$\lim_{T\to 0} \|e^{it\Delta}w_0\|_{L^3([0,T];L^6(\mathbf{R}^2))} = 0.$$

2) Démontrer que pour toute donnée initiale w_0 dans $L^2(\mathbf{R}^2)$, il existe une unique solution maximale définie sur $[0, T^\star[$ w de (NLS_3) appartenant à

$$C([0, T^\star[; L^2(\mathbf{R}^2)) \cap L^3_{\text{loc}}([0, T^\star[; L^6(\mathbf{R}^2)).$$

3) Démontrer que si $T^\star$ est fini, alors

$$\int_0^{T^\star} \|u(t,\cdot)\|^3_{L^6(\mathbf{R}^2)} dt = +\infty.$$

4) Démontrer que si f appartient à $L^3(\mathbf{R}; L^6(\mathbf{R}^2))$, pour tout réel strictement positif ε, il existe un réel strictement positif R_ε telle

$$\|f - \mathbf{1}_{\mathcal{C}_\varepsilon} f\|_{L^3(\mathbf{R};L^6(\mathbf{R}^2))} \leq \varepsilon. \quad \text{avec} \quad \mathcal{C}_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbf{R}^2 \ / \ R_\varepsilon^{-1} \leq |x| \leq R_\varepsilon\}.$$

5) En déduire que si u et v sont deux fonctions appartiennent à $L^3(\mathbf{R}; L^6(\mathbf{R}^2))$ alors on a

$$\lim_{\Lambda\to\infty} u(t,x)\Lambda^{-2}v^2(\Lambda^{-2}t, \Lambda^{-1}x) = \lim_{\Lambda\to\infty} u^2(t,x)\Lambda^{-1}v(\Lambda^{-2}t, \Lambda^{-1}x) = 0$$

dans l'espace $L^1(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^2))$.

On considère maintenant la solution w_Λ associée à la donnée intiale $w_{0,\Lambda}$ donnée par la question 2). On cherche à démontrer que le temps maximal d'existence $T^\star_\Lambda$ vaut $+\infty$.

6) Démontrer que si

$$w_{\Lambda,\mathrm{app}}(t,x) \stackrel{\text{déf}}{=} u(t,x) + \Lambda^{-1} v(\Lambda^{-2}t, \Lambda^{-1}x) \quad \text{et} \quad R_\Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} w_\Lambda - w_{\Lambda,\mathrm{app}}$$

alors R_Λ est solution de

$$\begin{aligned}
i\partial_t R_\Lambda + \Delta R_\Lambda &= L_\Lambda + F_\Lambda \quad \text{avec}\\
|L_\Lambda(t,x)| &\leq C\Big(|w_{\Lambda,\mathrm{app}}(t,x)|^2 + |R_\Lambda(t,x)|^2\Big)|R_\Lambda(t,x)| \quad \text{et}\\
|F_\Lambda(t,x)| &\leq C\Big(|u(t,x)|\Lambda^{-2}|v(\Lambda^{-2}t,\Lambda^{-1}x)|^2 + |u(t,x)|^2\Lambda^{-1}|v(\Lambda^{-2}t,\Lambda^{-1}x)|\Big)
\end{aligned}$$

7) Soit f une fonction positive intégrable sur $\mathbf{R}^+$, démontrer que pour tout réel η strictement positif, il existe une suite finie strictement croissante $(T_j)_{0\leq j\leq N}$ telle que $T_0 = 0$, $T_N = \infty$ et telle que

$$\forall j \in \{0,\cdots,N-2\}\,,\ \int_{T_j}^{T_{j+1}} f(t)dt = \eta\,,\ \forall j \in \{0,\cdots,N-2\}\,,$$
$$\int_{T_{N-1}}^{\infty} f(t)dt \leq \eta \quad \text{et} \quad N \leq \frac{1}{\eta}\int_0^\infty f(t)dt\,.$$

8) Démontrer qu'il existe un réel strictement positif η tel que pour tout intervalle $I = [a,b)$ inclus dans $[0,T^\star_\Lambda[$ tel que

$$\int_I \|w_{\Lambda,\mathrm{app}}(t,\cdot)\|^3_{L^6(\mathbf{R}^2)}dt \leq \eta\,,$$

alors

$$\|R_\Lambda\|_{L^\infty(I;L^2(\mathbf{R}^2))} + \|R_\Lambda\|_{L^3(I;L^6(\mathbf{R}^2))} \leq C\Big(\|R_\Lambda(a)\|_{L^2} + \|R_\Lambda\|^3_{L^3(I;L^6(\mathbf{R}^2))} + \|F_\Lambda\|_{L^1(I;L^2(\mathbf{R}^2))}\Big).$$

9) Conclure en considérant

$$T_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sup\Big\{T < T^\star_\Lambda\,,\ \|R_\Lambda\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbf{R}^2))} + \|R_\Lambda\|_{L^3([0,T];L^6(\mathbf{R}^2))} \leq \varepsilon\Big\}.$$