EXAMEN DU 8 JANVIER 2014
"THÉORIE DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION"

QUESTIONS DE COURS

---

1) Énoncer et démontrer le théorème relatif à la structure du problème de Stokes stationnaire sur un domaine borné. (le théorème 3.1.1. des notes de cours).

2) Énoncer et démontrer le théorème d'existence et d'unicité pour l'équation de Navier-Stokes posée dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ avec une donnée initiale dans l'espace $\mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ avec la force extérieure $f = 0$ pour simplifier si souhaité (le théorème 4.2.1 des notes).

3) Énoncer et démontrer le théorème dit $TT^\star$ permettant de passer des inégalités dispersives aux estimations de Strichartz (le théorème 5.4.1 des notes de cours).

PROBLÈME I

Dans tout ce problème, on considère un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ que l'on désigne par Ω. Le but est d'étudier le système $(\widetilde{NS})$ suivant problème est d'étudier l'équation

$$(\widetilde{NS}) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u\cdot\nabla u + \dfrac{1}{2} u \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \quad et \quad u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

On posera $\mathcal{V} \stackrel{\text{déf}}{=} (H^1_0(\Omega))^3$, $\mathcal{V}' \stackrel{\text{déf}}{=} (H^{-1}(\Omega))^3$, $\mathcal{H} \stackrel{\text{déf}}{=} (L^2(\Omega))^3$ *et pour u dans $\mathcal{V}'$ et φ dans $\mathcal{V}$*

$$\langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{3} \langle u^j, \varphi^j\rangle_{H^{-1}\times H^1_0}.$$

On désigne par $\mathbb{E}_n$ la projection de $\mathcal{V}'$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{H}_n$ le produit trois fois de l'espace vectoriel engendré par les $n+1$ premiers vecteurs propres du laplacien du Dirichlet sur Ω et on pose $\mathcal{H}_n \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}_n \mathcal{H}$. On appellera solution faible de $(\widetilde{NS})$ toute fonction u de l'espace

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{déf}}{=} C(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}') \cap L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V})$$

qui vérifie, pour toute fonction φ de $C^1(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ et pour tout T de $]0,\infty[$,

$$\begin{aligned}\langle u(t), \varphi(t)\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} = \langle u_0, \varphi(0)\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} &+ \int_0^T \sum_{1\leq j,k\leq 3} \int_\Omega u^j(t,x)\partial_k u^k(t,x)\varphi^k(t,x) dt dx \\ + \int_0^T \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \operatorname{div} u(t,x) u^j(t,x)\varphi^j(t,x) dt dx &+ \int_0^T \langle \Delta\varphi(t) + \partial_t\varphi, u(t)\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}\, dt\,.\end{aligned}$$

On rappelle que $\|a\|_{(L^3(\Omega))^3} \leq C\|a\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\|a\|_{\mathcal{V}}^{\frac12}$ *et que* $\|a\|_{(L^6(\Omega))^3} \leq C\|a\|_{\mathcal{V}}$.

1) Démontrer que l'espace $(L^{\frac65}(\Omega))^3$ est continûment inclus dans $\mathcal{V}'$.

2) En déduite que $\|a\cdot\nabla b\|_{\mathcal{V}'} \leq C\|a\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\|a\|_{\mathcal{V}}^{\frac12}\|b\|_{\mathcal{V}}$.

3) Démontrer que, pour tout n, il existe une unique fonction u_n continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathcal{H}_n$ qui vérifie

$$\frac{du_n}{dt} + \mathbb{E}_n(u_n\cdot\nabla u_n) - \Delta u_n + \frac12 \mathbb{E}_n((\operatorname{div} u_n)u_n) = 0 \quad \text{et}$$
$$\frac12\|u_n(T)\|^2_{\mathcal{H}} + \int_0^T \|u_n(t)\|^2_{\mathcal{V}}\, dt = \frac12\|\,\mathbb{E}_n\, u_0\|^2_{\mathcal{H}}.$$

4) Démontrer que, $\forall T>0$, la suite $\left(\dfrac{du_n}{dt}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de l'espace $L^{\frac43}([0,T];\mathcal{V}')$.

5) Démontrer qu'il existe une fonction u de $\mathcal{E}$ telle que,

$$\forall\varphi\in L^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{V})\,,\ \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^+} (u_n(t)|\varphi(t))_{\mathcal{V}}\, dt = \int_{\mathbb{R}^+} (u(t)|\varphi(t))_{\mathcal{V}}\, dt \quad \text{et}$$
$$\forall T>0\,,\ \lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t)-u(t)\|_{\mathcal{V}'} = 0.$$

6) Que peut-on en déduire ?

PROBLÈME II

On veut étudier le système suivant sur $\mathbb{R}^3$ pour les inconnues sont $(u,v)=(u,v^1,v^2,v^3)$ où u et les v^j sont des fonctions de $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$,

$$(SLW)\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t u + c\,\mathrm{div}\, v &=& 0\\ \partial_t v + c\nabla u &=& F(u)\end{array}\right. \qquad \text{avec} \quad (u,v)_{|t=0}=(u_0,v_0).$$

où F est une fonction de classe 3 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre 3 sont bornées et telle que $F(0)=0$ et où c est une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées sont bornées. Pour k entier positif, on désigne par $H^k(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^3)$. Il est muni de la norme

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^3)} \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\sum_{|\alpha|\leq k}\|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2\Big)^{\frac12}.$$

1) Démontrer que l'espace $H^2(\mathbb{R}^3)$ est continûment inclus dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$. En déduire que l'espace $H^2(\mathbb{R}^3)$ est une algèbre.

2) Démontrer que pour toute fonction $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, de classe C^2 et nulle en 0, il existe une constante C (dépendant de H), telle que si u appartient de $H^2(\mathbb{R}^3)$, alors $\mathcal{G}(u)$ appartient à $\big(H^2(\mathbb{R}^3)\big)^3$ et

$$\|\mathcal{G}(u)\|_{(H^2(\mathbb{R}^3))^3} \leq C\big(\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}\big).$$

3) Démontrer qu'il existe trois fonctions $(G_j)_{1\leq j\leq 3}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$F(x)-F(y)=\sum_{j=1}^{3}(x-y)^j G_j(x,y).$$

4) Démontrer que l'application

$$u \longmapsto F(u)$$

est une application de $H^2(\mathbb{R}^3)$ dans $(H^2(\mathbb{R}^3))^3$ qui est lipschitzienne sur les ensembles bornées de $H^2(\mathbb{R}^3)$.

5) Définir une notion de solution continue à valeurs dans $(H^2(\mathbb{R}^3))^4$ pour le système (SLW).

6) Mettre en place un schéma itératif pour résoudre le système (SLW).

7) Démontrer que le système (SLW) admet une unique solution continue à valeurs $H^2(\mathbb{R}^3)$.