EXAMEN DU 16 JUIN 2014
"THÉORIE DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION"

QUESTIONS DE COURS

1) Énoncer et démontrer le théorème décrivant les propriétés de $(U(t))_{t\in\mathbf{R}}$ lors que l'on a

$$\forall t \in \mathbf{R}\,,\ \|U(t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \quad \text{et} \quad \forall (t,t') \in \mathbf{R}^2 \,/\, t \neq t'\,,\ \|U(t)U^\star(t')\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|t-t'|^\sigma}\,\cdot$$

2) Démontrer que si $\mathcal{C}$ est une couronne et B une boule, il existe une constante C telle que pour tout entier k positif et pour tout couple (a,b) de réels tels que $b \geq a \geq 1$ on ait, pour toute fonction u de L^a,

$$\text{Supp }\ \widehat{u} \subset \lambda B \Rightarrow \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^b} \leq C^{k+1}\lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a};$$

$$\text{Supp }\ \widehat{u} \subset \lambda\mathcal{C} \Rightarrow C^{-k-1}\lambda^k\|u\|_{L^a} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \leq C^{k+1}\lambda^k\|u\|_{L^a}.$$

Exercice I

Dans tout cet exercice, nous considérerons une partition de l'unité dyadique, c'est-à-dire une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ telle que l'on ait

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}\,,\ \sum_{j\in\mathbf{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1.$$

On notera $\dot\Delta_j$ l'opérateur défini sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ par

$$\dot\Delta_j u = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}\cdot)\widehat{u}).$$

On définit alors

$$\|a\|_{\dot B^s_{2,1}} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} 2^{js}\|\dot\Delta_j a\|_{L^2}.$$

1) Démontrer qu'il existe une constante C telle que, pour toute fonction f de $H^1(\mathbf{R}^d)$, on ait

$$\|f\|_{\dot B^{\frac12}_{2,1}} \leq C\|f\|^{\frac12}_{L^2}\|\nabla f\|^{\frac12}_{L^2},$$

Indication : On distinguera le cas des hautes fréquences de celui des basses fréquences.

On se place dans le cas où $d=1$. On considère deux réels strictement positifs R et λ tels que $R \leq \dfrac{1}{\lambda}\cdot$ Soit $\chi_{\lambda,R}$ la fonction paire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\chi_{\lambda,R}\equiv 0$ pour $x \geq R+1/\lambda$ et $\chi_{\lambda,R}\equiv 1$ sur $[0,R]$ et

$$\chi_{\lambda,R}(x) = -\lambda\left(x - R - \frac{1}{\lambda}\right) \quad sur \quad \left[R, R+\frac{1}{\lambda}\right]\cdot$$

2) Calculer $\|\chi_{\lambda,R}\|_{L^2}$ et $\|\nabla\chi_{\lambda,R}\|_{L^2}$.

3) En déduire l'existence d'une constante C strictement positive telle que, pour tout λ et R tels que $\lambda R \leq 1$, on ait

$$\|\chi_{\lambda,R}\|_{\dot B^{\frac12}_{2,1}} \leq C.$$

Exercice II

EXERCICE II

On considère une solution u de Kato de l'équation de Navier-Stokes

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u + v\cdot\nabla u - \nu\Delta u & = & -\nabla p\\ \operatorname{div} u & = & 0\\ u_{|t=0} & = & u_0 \in \mathcal{V}_\sigma^{\frac12}\\ u_{|\partial\Omega} & = & 0. \end{array}\right.$$

donné par le Théorème 5.3.1 des notes de cours. On suppose que u_0 appartient à $\mathcal{V}_\sigma$.

1) Démontrer que l'application bilinéaire

$$(v,w) \longmapsto \mathbf{P}(v\cdot\nabla w)$$

envoie continûment $\mathcal{V}_\sigma \times \mathcal{V}_\sigma$ dans $\mathcal{V}_\sigma^{-\frac12}$.

2) Soit $(e_j)_{j\in\mathbf{N}}$ la suite des vecteurs propres de l'opérateur de Stokes. Démontrer l'existence d'une constante C, pour tout couple (v,w) de $\mathcal{V}_\sigma\times\mathcal{V}_\sigma$, il existe une suite $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de nombre positifs telle que

$$\sum_j c_j^2 = 1 \quad \text{et} \quad |\langle v\cdot\nabla w, e_j\rangle| \leq C c_j \lambda_j^{\frac12} \|v\|_{\mathcal{V}_\sigma}\|w\|_{\mathcal{V}_\sigma}.$$

3) Démontrer que l'application bilinéaire, qui à un couple (v,w) de $L^\infty([0,T];\mathcal{V}_\sigma)\times L^\infty([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$ associe le solution de problème de Stokes d'évolution

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t B - \Delta B & = & v\cdot\nabla w - \nabla p\\ B_{|t=0} & = & 0 \end{array}\right.$$

envoie continûment $L^\infty([0,T];\mathcal{V}_\sigma)\times L^\infty([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$ dans $L^\infty([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$ et que

$$\|B\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{V}_\sigma)} \leq C T^{\frac14}\|v\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{V}_\sigma)}\|w\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{V}_\sigma)}.$$

4) Soit $T^\star$ le temps maximal d'existence de la solution de Kato. Démontrer l'existence d'un temps maximal $\widetilde{T}^\star \leq T^\star$ d'existence d'une solution bornée en temps à valeurs $\mathcal{V}_\sigma$.

5) Démontrer que $\widetilde{T}^\star = T^\star$.