DM 2 - Unicité des solutions de Leray en dimension deux

Le but de ce devoir maison est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ à divergence nulle. Alors il existe une unique solution de Leray $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))$ du système de Navier-Stokes*

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p - \Delta u = 0, \\ \text{div } u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{aligned}$$

De plus, u vérifie une égalité d'énergie : pour tout $t \geq 0$, on a

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \, ds = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Enfin, si u et v sont deux solutions de Leray correspondant aux données initiales u_0 et v_0, on a, pour tout $t \geq 0$,

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\int_0^t \|\nabla(u(s) - v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \, ds \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 \exp(C \min(\|u_0\|_{L^2}^4, \|v_0\|_{L^2}^4)).$$

1. Lois de produit dans $H^1(\mathbb{R}^2)$:
   Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ à divergence nulle,
   $$\begin{aligned} \|\text{div } (u \otimes u)\|_{H^{-1}((\mathbb{R}^2))} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \\ \langle \text{div } (u \otimes u) - \text{div } (v \otimes v), u - v \rangle_{H^{-1}, H^1} \leq \|\nabla(u - v)\|_{L^2}^{3/2} \|u - v\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2}^{1/2} \|u\|_{L^2}^{1/2}. \end{aligned}$$
2. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))$ une solution de Leray du système de Navier-Stokes bi-dimensionnel. On pose $f = -\text{div } (u \otimes u)$.
   (a) Justifier que $f \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^2))$.
   (b) En déduire que u vérifie l'égalité d'énergie.
3. Soit u et v sont deux solutions de Leray correspondant aux données initiales $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ à divergence nulle. On pose $w = u - v$, $f = \text{div } (u \otimes u)$, $g = \text{div } (v \otimes v)$. Montrer que pour tout $t \geq 0$,
   $$\|w(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \, ds \leq C\int_0^t \|\nabla w(s)\|_{L^2}^{3/2} \|w(s)\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla u(s)\|_{L^2}^{1/2} \|u(s)\|_{L^2}^{1/2} \, ds.$$
4. En déduire que
   $$\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \, ds \leq C\|u_0\|_{L^2}^2 \int_0^t \|w(s)\|_{L^2}^2 \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds.$$
5. En utilisant le Lemme de Gronwall, montrer que
   $$\begin{aligned} \|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \, ds &\leq \|w_0\|_{L^2}^2 \exp\left(C\|u_0\|^2 \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds\right) \\ &\leq \|w_0\|_{L^2}^2 \exp(C\|u_0\|_{L^2}^4). \end{aligned}$$

   Conclure.