DM 1 - Unicité des solutions entropiques des lois de conservation scalaires

Dans tout ce problème, on se donne un flux $A \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})^N$, et on considère le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div} A(u) = 0 \quad \textit{dans }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N, \\ u_{|t=0} = u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \tag{LCS}$$

On rappelle la définition suivante :

Définition 1. *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$. On dit que u est une solution entropique de* (LCS) *si u est solution de* (LCS) *au sens des distributions et si pour toute fonction $S \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ convexe, on a*

$$\partial_t S(u) + \operatorname{div} \eta_S(u) \leq 0 \tag{1}$$

au sens des distributions, où $\eta_S' = S'A'$.

Le sens de (1) *est le suivant : pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c([0,+\infty[\times\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi \geq 0$, on a*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} [S(u(t,x))\partial_t\varphi(t,x) + \eta_S(u(t,x))\cdot\nabla_x\varphi(t,x)]\, dt\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} S(u_0(x))\varphi(0,x)\, dx \geq 0.$$

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 2 (Unicité des solutions entropiques de (LCS))**.** *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Alors le problème de Cauchy* (LCS) *admet au plus une solution entropique $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$.*

De plus, pour tout $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, si v est la solution entropique de (LCS) *telle que $v_{|t=0} = v_0$, alors*

$$\partial_t|u-v| + \operatorname{div}\ [\operatorname{sgn}(u-v)(A(u)-A(v))] \leq 0 \tag{2}$$

au sens des distributions.

En particulier, si $u_0, v_0 \in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N))$ et pour presque tout $t \geq 0$, on a

$$\|u(t)-v(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0-v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

Remarque 3. *On peut également montrer l'existence de solutions entropiques, mais cela ne fait pas l'objet de ce devoir.*

Première partie : entropies de Kruzkhov

Le but de cette première partie est de montrer le résultat suivant :

Proposition 4. *Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$. Alors u est solution entropique de* (LCS) *si et seulement si*

$$\forall k \in \mathbb{R},\quad \partial_t|u-k| + \operatorname{div}\ (\operatorname{sgn}(u-k)(A(u)-A(k))) \leq 0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'. \tag{3}$$

Les entropies $\xi \mapsto |\xi - k|$ sont appelées entropies de Kruzkhov. La fonction sgn est définie par $\operatorname{sgn}(\xi) = \mathbf{1}_{\xi>0} - \mathbf{1}_{\xi<0}$.

1. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N))$ une solution entropique de (LCS), et soit $k \in \mathbb{R}$ quelconque.

(a) Pour $\delta > 0$ quelconque, on définit $S_\delta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par

$$S_\delta(\xi) = \begin{cases} |\xi - k| - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\delta & \text{si } |\xi - k| \geq \delta, \\ \frac{2\delta}{\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi(\xi-k)}{2\delta}\right)\right) & \text{si } |\xi - k| < \delta. \end{cases}$$

Montrer que $S_\delta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, que S_δ est convexe et que

$$|S_\delta(\xi) - |\xi - k|| \leq \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\delta \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

(b) En choisissant η_{S_δ} de telle sorte que $\eta_{S_\delta}(k) = 0$ (ce qui est licite puisque η_{S_δ} est défini à une constante près), montrer que lorsque $\delta \to 0$,

$$S_\delta(u) \rightharpoonup |u - k|, \quad \eta_{S_\delta}(u) \rightharpoonup \operatorname{sgn}(u - k)(A(u) - A(k))$$

au sens des distributions dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, et que

$$S_\delta(u_0) \rightharpoonup |u_0 - k|$$

au sens des distributions dans $\mathbb{R}^N$.

(c) En déduire que u vérifie (3) pour tout $k \in \mathbb{R}$.

2. Réciproquement, soit u une solution de (LCS) au sens des distributions telle que l'inégalité (3) est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $m \in \mathbb{N}$ quelconque. On considère l'ensemble $\mathcal{E}_m$ des fonctions T de la forme

$$T(x) = b_0 + b_1 x + \sum_{i=1}^{m} a_i |x - k_i|,$$

avec $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_1, \cdots, a_m > 0$ et $k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{R}$.
Montrer que si $T \in \mathcal{E}_m$, alors T est convexe et que

$$\partial_t T(u) + \operatorname{div} \eta_T(u) \leq 0$$

au sens des distributions, où

$$\eta_T(\xi) := b_1 A(\xi) + \sum_{i=1}^{m} a_i \operatorname{sgn}(\xi - k_i)(A(\xi) - A(k_i)).$$

(b) Montrer que si T est une fonction convexe continue affine par morceaux, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $T \in \mathcal{E}_m$.

(c) Soit $S \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ une fonction convexe quelconque. On pose $M := \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)}$.
Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Montrer qu'il existe $m_\epsilon > 0$ et $T_\epsilon \in \mathcal{E}_{m_\epsilon}$ tels que

$$\forall x \in [-M, M], \quad S(x) \leq T_\epsilon(x) \leq S(x) + \epsilon, \quad |\eta_S(x) - \eta_{T_\epsilon}(x)| \leq \|A'\|_\infty \epsilon.$$

(d) En déduire que u est une solution entropique de (LCS).

Remarque 5. *On peut montrer le même résultat en remplaçant la famille des entropies de Kruzkhov par la famille $\xi \mapsto (\xi - k)_+$, pour $k \in \mathbb{R}$, ou par la famille $\xi \mapsto (\xi - k)_-$.*

À cet égard, on remarquera que $|\xi| = 2\xi_+ - \xi$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Deuxième partie : preuve de l'inégalité (2)

L'idée est d'utiliser l'inégalité (3) pour u dans les variables t, x avec $k = v(s, y)$, puis l'inégalité (3) pour v dans les variables s, y pour $k = u(t, x)$, et de conclure à l'aide d'un noyau de régularisation. Pour cela, on commence par quelques résultats techniques sur la régularisation par convolution.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty[\times\mathbb{R}^N)$. Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(]-\infty, 0[\times\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\int_{-\infty}^{0} \int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1, \quad \rho \geq 0.$$

Pour $\epsilon > 0$, on pose $\rho_\epsilon := \epsilon^{-(N+1)}\rho(\cdot/\epsilon)$.

1. Soit $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$. Montrer que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |v(t,x) - v(s,y)|\varphi(t,x)\rho_\epsilon(t-s, x-y)\, dy\, ds\, dx\, dt = 0.$$

2. Soit F une fonction localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$, et soit u, v deux fonctions de $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}([0,\infty[, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$. Montrer que

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(u(t,x), v(s,y))\varphi(t,x)\rho_\epsilon(t-s, x-y)\, dy\, ds\, dx\, dt \\ = & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(u(t,x), v(t,x))\varphi(t,x)\, dx\, dt, \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} F(u_0(x), v(s,y))\varphi(0,x)\rho_\epsilon(-s, x-y)\, dy\, ds\, dx \\ = & \int_{\mathbb{R}^N} F(u_0(x), v_0(x))\varphi(0,x)\, dx. \end{aligned}$$

3. Soit $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{C}([0,\infty[, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ deux solutions entropiques de (LCS), associées aux données initiales u_0, v_0 respectivement. Soit $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,\infty[\times\mathbb{R}^N \times [0,\infty[\times\mathbb{R}^N)$ telle que $\Phi \geq 0$. On pose $\Omega = [0,\infty[\times\mathbb{R}^N \times [0,\infty[\times\mathbb{R}^N$. Montrer que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega |u(t,x) - v(s,y)| \left(\partial_t\Phi + \partial_s\Phi\right)(t,x,s,y)\, dy\, ds\, dx\, dt \\ + & \int_\Omega \operatorname{sgn}(u(t,x) - v(s,y)) \left(A(u(t,x)) - A(v(s,y))\right) \cdot \left(\nabla_x\Phi + \nabla_y\Phi\right)(t,x,s,y)\, dy\, ds\, dx\, dt \\ + & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} |u_0(x) - v(s,y)|\Phi(0,x,s,y)\, dy\, dx\, ds \\ + & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} |u(t,x) - v_0(y)|\Phi(t,x,0,y)\, dx\, dy\, dt \geq 0. \end{aligned}$$

4. En prenant $\Phi(t,x,s,y) = \varphi(t,x)\rho_\epsilon(t-s, x-y)$ et en supposant $\varphi \geq 0$ (en plus des hypothèses précédentes), montrer que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left[|u(t,x) - v(t,x)|\partial_t\varphi + \operatorname{sgn}(u(t,x) - v(t,x)) \left(A(u(t,x)) - A(v(t,x))\right) \cdot \nabla_x\varphi\right] & \\ + \int_0^\infty |u_0(x) - v_0(x)|\varphi(0,x)\, dx \geq 0. & \quad (4) \end{aligned}$$

En déduire l'inégalité (2).

Troisième partie : unicité et contraction L^1

Soit u, v deux solutions entropiques de (LCS) pour les données initiales respectives $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

1. Montrer que pour tout $T > 0$, pour tout $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que $\chi \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} |u(T,x) - v(T,x)|\chi(x)\,dx \\
\leq\ & \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x) - v_0(x)|\chi(x)\,dx \\
+\ & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{sgn}(u(t,x) - v(t,x))\,(A(u(t,x)) - A(v(t,x))) \cdot \nabla\chi(x)\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

2. En déduire que pour tout $\alpha > 0$, pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(T,x) - v(T,x)| \exp(-\alpha|x|)\,dx \ \leq\ & \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x) - v_0(x)| \exp(-\alpha|x|)\,dx \\
+\ & \alpha\|A'\|_\infty \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x) - v(t,x)| \exp(-\alpha|x|)\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x) - v(t,x)| \exp(-\alpha|x|)\,dx\,dt \\
& \qquad \leq \frac{\exp(\alpha\|A'\|_\infty T) - 1}{\alpha\|A'\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x) - v_0(x)| \exp(-\alpha|x|)\,dx, \quad (5)
\end{aligned}$$

   puis que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(T,x) - v(T,x)| \exp(-\alpha|x|)\,dx \leq \exp(\alpha\|A'\|_\infty T) \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x) - v_0(x)| \exp(-\alpha|x|)\,dx.$$

4. En déduire qu'il existe au plus une solution entropique de (LCS) pour chaque donnée initiale $u_0 \in L^\infty$.
5. On suppose à présent que $u_0, v_0 \in L^1 \cap L^\infty$. Montrer tout d'abord que $u(t), v(t) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t > 0$, puis que pour presque tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \|v(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \\
\|u(t) - v(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$