EXAMEN DU 7 MAI 2019
"THÉORIE DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION"

QUESTION DE COURS

Existence et unicité dans $\mathcal{C}([0,T],\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)) \cap L^4([0,T],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ des solutions du système de Stokes avec donnée initiale dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ et terme source dans $L^2([0,T],\dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$.

PROBLÈME

Soit $N \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $\alpha \geq 0$. On pose $p = \alpha + 2$. Le but de ce problème est de montrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Il existe une fonction $u \in L^\infty([0, +\infty[, H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ telle que $\partial_t u \in L^\infty([0, +\infty[, L^2(\Omega))$ vérifiant l'équation*

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u + |u|^\alpha u = 0 \quad \textit{dans }]0, +\infty[\times\Omega, \\ u_{|t=0} = u_0, \quad \partial_t u_{|t=0} = u_1 \end{aligned} \tag{1}$$

au sens suivant : pour tout $v \in \mathcal{C}_c^1([0, \infty[, H_0^1(\Omega)) \cap L^1([0, \infty[, L^p(\Omega))$, on a

$$- \int_0^\infty \int_\Omega \partial_t u \partial_t v - \int_\Omega u_1(x) v(0, x)\, dx + \int_0^\infty \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_0^\infty \int_\Omega |u|^\alpha u v = 0 \tag{2}$$

(et $u_{|t=0} = u_0$, l'égalité ayant lieu au sens des fonctions de $L^2(\Omega)$).

Dans la suite, on pose $V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

1 Préliminaires

1. Soit $u \in L^\infty([0, +\infty[, V)$ telle que $\partial_t u \in L^\infty([0, +\infty[, L^2(\Omega))$, et soit $v \in \mathcal{C}_c^1([0, \infty[, H_0^1(\Omega)) \cap L^1([0, \infty[, L^p(\Omega))$. Montrer que chacune des intégrales de (2) a un sens.
2. Soit $u \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, V \cap H^2(\Omega))$. On suppose que u est solution de (1) dans un sens classique. On pose, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left((\partial_t u(t, x))^2 + |\nabla u(t, x)|^2 \right) dx + \frac{1}{p} \int_\Omega |u(t, x)|^p dx.$$

   (a) Justifier que $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$ et montrer que $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$ pour tout $t \geq 0$.
   (b) En déduire que $\partial_t u \in L^\infty([0, +\infty[, L^2(\Omega))$, et que $u \in L^\infty([0, +\infty[, H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$.
3. Soit $T > 0$, et soit $w \in W^{1,\infty}([0, T], L^2(\Omega))$. Justifier que $w \in \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega))$ et que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|w(t) - w(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq t \|\partial_t w\|_{L^\infty([0,T], L^2(\Omega))}.$$

2 Construction d'une suite de solutions approchées

On utilise dans cette partie les notations du Lemme 2 en Appendice.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. On note $E_n = \text{Vect}\,(w_0, \cdots, w_n)$. Soit $u_{0,n}, u_{1,n} \in E_n$. Montrer qu'il existe $T_n > 0$ et $u_n \in \mathcal{C}^2([0, T_n[, E_n)$ tels que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, pour tout $t \in [0, T_n[$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_n''(t, x) w_k(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u_n(t, x) \cdot \nabla w_k(x)\, dx + \int_\Omega |u_n(t, x)|^\alpha u_n(t, x) w_k(x)\, dx = 0, \\ u_n(t = 0) = u_{n,0}, \quad \partial_t u_n(t = 0) = u_{n,1}. \end{aligned}$$

(Indication : on écrira $u_n(t) = \sum_{i=0}^n g_{n,i}(t) w_i$, avec $g_{n,i} \in \mathcal{C}^2([0, T_n[)$ et on formulera les égalités ci-dessus comme un système d'équations différentielles non-linéaires sur les coefficients $g_{n,i}$.)

5. Montrer que pour tout $t \in [0, T_n[$,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left((\partial_t u_n(t,x))^2 + |\nabla u_n(t,x)|^2\right)\, dx + \frac{1}{p}\int_\Omega |u_n(t,x)|^p dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \left((u_{n,1})^2 + |\nabla u_{n,0}|^2\right) + \frac{1}{p}\int_\Omega |u_{n,0}|^p.$$

6. En déduire que $u_n \in L^\infty([0,T_n[, V)$ et que $\partial_t u_n \in L^\infty([0,T_n[, L^2(\Omega))$, puis que $g_{i,n} \in W^{1,\infty}([0,T_n[)$.
7. En déduire que l'on peut prendre $T_n = +\infty$.
8. **Dans toute la suite du problème**, on choisit les suites $(u_{n,0})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ de telle sorte que

$$u_{n,0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \quad \text{dans } V,$$
$$u_{n,1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_1 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Montrer qu'il existe une constante C, indépendante de $n \in \mathbb{N}$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{t\geq 0}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega \left((\partial_t u_n(t,x))^2 + |\nabla u_n(t,x)|^2\right)\, dx + \frac{1}{p}\int_\Omega |u_n(t,x)|^p dx\right] \leq C.$$

3 Passage à la limite

On conserve les notations de la partie précédente.

9. Montrer qu'il existe une suite d'entiers naturels $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, strictement croissante, et une fonction $u \in L^\infty([0,+\infty[, V)$ telle que $\partial_t u \in L^\infty([0,+\infty[, L^2(\Omega))$ telles que

$$u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans } w^* - L^\infty([0,+\infty[, H^1(\Omega)),$$
$$u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans } w^* - L^\infty([0,+\infty[, L^p(\Omega)),$$
$$\partial_t u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_t u \quad \text{dans } w^* - L^\infty([0,+\infty[, L^2(\Omega)),$$
$$\forall T > 0, \quad u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans } w - H^1([0,T]\times\Omega).$$

En déduire que quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on a également

$$\forall T > 0, \quad u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } L^2([0,T]\times\Omega),$$
$$u_{n_k}(t,x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(t,x) \quad \text{p.p. } t, x.$$

10. En utilisant le Lemme 3 en Appendice, montrer que pour tout $T > 0$,

$$|u_{n_k}|^\alpha u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} |u|^\alpha u \quad \text{dans } L^{p'}([0,T]\times\Omega),$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

11. Soit $m \in \mathbb{N}$ quelconque, et soit $v \in \mathcal{C}^1_c([0,\infty[, E_m)$.
    (a) Montrer que pour tout $n \geq m$, on a

$$-\int_0^\infty \int_\Omega \partial_t u_n \partial_t v - \int_\Omega u_{n,1}(x) v(0,x)\, dx + \int_0^\infty \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v + \int_0^\infty \int_\Omega |u_n|^\alpha u_n v = 0.$$

    (b) Montrer que

$$-\int_0^\infty \int_\Omega \partial_t u \partial_t v - \int_\Omega u_1(x) v(0,x)\, dx + \int_0^\infty \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_0^\infty \int_\Omega |u|^\alpha u v = 0.$$

12. Soit $v \in \mathcal{C}^1_c([0,\infty[, H^1_0(\Omega)) \cap L^1([0,\infty[, L^p(\Omega))$. Montrer que l'égalité (2) est vérifiée.
13. Montrer que l'on a $u(t=0) = u_0$.
14. Conclure.

Appendice

On pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants :

— Inégalité de Poincaré : si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,
$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

— Séparabilité de $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$:

Lemme 2. *Soit $V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, avec $p \geq 2$. Alors V est séparable : il existe une suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $w_k \in V$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;

(ii) Les fonctions $w_0, \cdots w_k$ sont linéairement indépendantes pour tout $k \in \mathbb{N}$;

(iii) $\int_\Omega w_k w_l = \delta_{k,l}$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}$;

(iv) Les combinaisons linéaires finies des w_i sont denses dans V.

— Résultat de convergence faible :

Lemme 3. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, $1 < q < +\infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^q(U)$, $f \in L^q(U)$ telles que*
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^q(U)} < +\infty, \quad f_n(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(y) \quad p.p.\ y \in U.$$
Alors $f_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} f$ dans $w - L^q(U)$.