EXAMEN DU 14 MAI 2018
"THÉORIE DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION"

QUESTION DE COURS

Solutions de Leray : construction de la suite d'approximation de Friedrichs, existence globale et régularité en temps de celle-ci (les trois premiers lemmes du chapitre).

PROBLÈME

Le but de ce problème est de montrer le caractère localement bien posé de l'équation de Gross-Pitaevski en dimensions 2 et 3. L'équation de Gross-Pitaevski s'écrit

$$i\partial_t u + \Delta u = (|u|^2 - 1)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{GP}$$

Dans tout le problème, on notera $e^{it\Delta}$ l'opérateur de propagation associé à l'équation de Schrödinger linéaire.

On introduit les espaces fonctionnels suivants (dans toute la suite, les fonctions sont à valeurs complexes) :

$$X^1(\mathbb{R}^d) := \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^d),\ \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d)^d\},$$
$$E := \{u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d),\ \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d)^d,\ |u|^2 - 1 \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

et l'on munit $X^1(\mathbb{R}^d)$ de la norme

$$\|u\|_{X^1} = \|u\|_{L^\infty} + \|\nabla u\|_{L^2}.$$

On définit également l'énergie associée à (GP) (aussi appelée énergie de Ginzburg-Landau)

$$\mathcal{E}(u) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}(|u|^2 - 1)^2, \quad \forall u \in E.$$

On admettra (et on pourra utiliser sans preuve) les résultats suivants :

Lemme 1.

— *On a l'inclusion*

$$E \subset X^1(\mathbb{R}^d) + H^1(\mathbb{R}^d).$$

— *On définit, pour $(u, v) \in E \times E$, la quantité*

$$d_E(u, v) = \|u - v\|_{X^1 + H^1} + \big\|\, |u|^2 - |v|^2 \big\|_{L^2},$$

où l'on rappelle que pour tout $w \in X^1(\mathbb{R}^d) + H^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\|w\|_{X^1+H^1} := \inf\{\|w_1\|_{X^1} + \|w_2\|_{H^1},\ w = w_1 + w_2,\ w_1 \in X^1(\mathbb{R}^d),\ w_2 \in H^1(\mathbb{R}^d)\}.$$

Alors d_E est une distance sur E, et (E, d_E) est un espace métrique complet.

— *On suppose que $d \in \{2, 3, 4\}$. Alors $E + H^1(\mathbb{R}^d) \subset E$ et pour tout $v \in E, w \in H^1(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|\, |v + w|^2 - 1\|_{L^2} \leq \|\, |v|^2 - 1\|_{L^2} + C\left(1 + \sqrt{\mathcal{E}(v)}\right)(\|w\|_{L^2} + \|w\|_{L^4}) + \|w\|_{L^4}^2.$$

De plus, pour tout $(v, \tilde{v}, w, \tilde{w}) \in E \times E \times H^1 \times H^1$, on a

$$\begin{aligned} d_E(v + w, \tilde{v} + \tilde{w}) \quad &\leq \quad C(1 + \|w\|_{H^1} + \|\tilde{w}\|_{H^1}) d_E(v, \tilde{v}) \\ &\quad + C\left(1 + \sqrt{\mathcal{E}(v)} + \sqrt{\mathcal{E}(\tilde{v})} + \|w\|_{H^1} + \|\tilde{w}\|_{H^1}\right)\|w - \tilde{w}\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Le but de ce problème est de montrer le résultat suivant :

Théorème 2. *On suppose que $d \in \{2, 3\}$. Soit $u_0 \in E$. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$ solution de* (GP) *telle que $u(0) = u_0$.*

1 Action de $e^{it\Delta}$ sur l'espace E

Dans toute cette partie, on suppose que d est un entier strictement positif quelconque.

1. Soit $f \in X^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\nabla(e^{it\Delta}f - f) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et que
$$\left\|\nabla(e^{it\Delta}f - f)\right\|_{L^2} \leq 2\|\nabla f\|_L^2 \quad \forall t \geq 0,$$
$$\lim_{t\to 0}\left\|\nabla(e^{it\Delta}f - f)\right\|_{L^2} = 0.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^d$ quelconque. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction cut-off telle que $\chi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$ et $\mathrm{Supp}\chi \subset B(0,2)$. Pour $j \in \{1, \cdots, d\}$, on pose
$$g_j(t,\xi) = -it\chi(t|\xi|^2)\xi_j \int_0^1 e^{-ist|\xi|^2}\, ds + \frac{1-\chi(t|\xi|^2)}{|\xi|^2}\xi_j(e^{-it|\xi|^2} - 1).$$
   (a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $j \in \{1, \cdots, d\}$, pour tout $(t,\xi) \in \mathbb{R}^{d+1}$,
$$|g_j(t,\xi)| \leq C|t|^{1/2}.$$
   (On pourra distinguer les cas $|t|\ |\xi|^2 \leq 1$ et $|t|\ |\xi|^2 \geq 1$).

   (b) Montrer que
$$\sum_{j=1}^d g_j(t,\xi)\xi_j = e^{-it|\xi|^2} - 1. \tag{1}$$
   (c) En utilisant la décomposition (1), montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$,
$$\|e^{it\Delta}f - f\|_{L^2} \leq C|t|^{1/2}\|\nabla f\|_{L^2}.$$
   (d) On suppose à présent que $f \in X^1(\mathbb{R}^d) + H^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $e^{it\Delta}f - f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\|e^{it\Delta}f - f\|_{L^2} \leq C|t|^{1/2}\|\nabla f\|_{L^2}.$$
   (On pourra par exemple utiliser un argument de dualité.)

3. En déduire que si $f \in X^1(\mathbb{R}^d) + H^1(\mathbb{R}^d)$, alors $e^{it\Delta}f \in X^1(\mathbb{R}^d) + H^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que
$$\|e^{it\Delta}f\|_{X^1+H^1} \leq C(1 + |t|^{1/2})\|f\|_{X^1+H^1}.$$

4. Soit $f \in X^1(\mathbb{R}^d) + H^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it\Delta}f \in X^1 + H^1$ est continue.

5. On suppose que $d \in \{2,3,4\}$. En utilisant les résultats du Lemme 1, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it\Delta}E \subset E$ et que pour tout $u_0 \in E$, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it\Delta}u_0 \in E$ est continue.

6. On suppose à présent que $d \in \{2,3\}$. Soit $R > 0$ quelconque et soit $u_0 \in E$ tel que $\mathcal{E}(u_0) \leq R$.
   (a) Pour tout $\delta > 0$, montrer qu'il existe $T = T(R,\delta) > 0$ tel que si $|t| \leq T$, $\|e^{it\Delta}u_0 - u_0\|_{L^4} \leq \delta$.
   (b) Montrer qu'il existe $T' = T'(R) > 0$ tel que $\sup_{|t|\leq T'} \mathcal{E}(e^{it\Delta}u_0) \leq 2R$.

7. On suppose encore que $d \in \{2,3\}$. Montrer que pour tout $R > 0$, pour tout $T > 0$, il existe $C_{T,R} > 0$ tel que pour tout $u_0, \tilde{u}_0 \in E$,
$$\mathcal{E}(u_0) \leq R,\ \mathcal{E}(\tilde{u}_0) \leq R \Rightarrow \sup_{|t|\leq T} d_E(e^{it\Delta}u_0, e^{it\Delta}\tilde{u}_0) \leq Cd_E(u_0, \tilde{u}_0).$$

2 Estimation du terme non linéaire

Dans toute cette partie, on suppose que $d \in \{2,3\}$. On définit la fonction $F : z \in \mathbb{C} \mapsto z(|z|^2 - 1)$.

8. Soit $u \in E$. Montrer que $F(u) \in L^2(\mathbb{R}^d) + L^{3/2}(\mathbb{R}^d)$ et que $\nabla(F(u)) \in L^2(\mathbb{R}^d) + L^{6/5}(\mathbb{R}^d)$.
9. Soit $R > 0$ quelconque. Montrer qu'il existe une constante $C_R > 0$ telle que pour tout $u, v \in E$ tels que $\mathcal{E}(u) \leq R,\ \mathcal{E}(v) \leq R$,
$$\|F(u) - F(v)\|_{L^2+L^{3/2}} + \|\nabla(F(u) - F(v))\|_{L^2+L^{6/5}} \leq C_R d_E(u,v).$$
10. Soit $T > 0$ quelconque, et soit $u \in \mathcal{C}([T,T],E)$. Montrer que l'application $t \in [-T,T] \mapsto \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\,[F(u(s))]\,ds$ est continue sur $[-T,T]$ à valeurs dans E. (On pourra penser, pour cette question et pour la suivante, à utiliser les estimations de Strichartz pour l'équation de Schrödinger linéaire.)
11. Soit $T \in]0,1]$ et soit $R > 0$ quelconque. Montrer qu'il existe une constante $C_R > 0$ telle que pour tout $u, v \in \mathcal{C}([-T,T],E)$ tels que
$$\sup_{t\in[-T,T]} \mathcal{E}(u(t)) \leq R,\ \sup_{t\in[-T,T]} \mathcal{E}(v(t)) \leq R$$
on a
$$\sup_{t\in[-T,T]} \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\,[F(u(s)) - F(v(s))]\ ds \right\|_{H^1} \leq C_R T^{1/2} \sup_{t\in[-T,T]} d_E(u(t,v(t))).$$
En déduire en particulier que
$$\sup_{t\in[-T,T]} \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\,[F(u(s))]\ ds \right\|_{H^1} \leq C_R T^{1/2} \sup_{t\in[-T,T]}$$

3 Résolution du problème de Cauchy

Dans toute cette partie, on suppose que $d \in \{2,3\}$.

12. Soit $u_0 \in E$, et soit $R > 0$ tel que $\mathcal{E}(u_0) \leq R$.
Pour $u \in \mathcal{C}([-T,T],E)$, on définit $\Phi(u) \in \mathcal{C}([-T,T],E)$ par
$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\,[F(u(s))]\ ds.$$
Pour $T > 0$, on définit l'ensemble fermé
$$X_{T,R} := \{u \in \mathcal{C}([-T,T],E),\ \sup_{|t|\leq T} \mathcal{E}(u(t)) \leq 3R\}.$$
Montrer que pour $T = T(R)$ suffisamment petit, l'application Φ vérifie les conditions suivantes :
   (a) L'ensemble $X_{T,R}$ est stable par Φ ;
   (b) Φ est une contraction sur $X_{T,R}$.
13. En déduire que Φ admet un unique point fixe dans $X_{T,R}$, et que ce point fixe est l'unique solution de (GP) dans $\mathcal{C}([T,T],E)$.
14. On introduit l'espace $X^2(\mathbb{R}^d) := \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^d),\ \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d), \nabla^2 u \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$. On rappelle (il n'est pas nécessaire de le démontrer) que $H^2(\mathbb{R}^d) \subset X^2(\mathbb{R}^d)$ pour $d \in \{2,3\}$ par injection de Sobolev. En adaptant la preuve ci-dessus, montrer que pour tout $u_0 \in X^2(\mathbb{R}^d)$, il existe $\bar{T}, \underline{T} > 0$ temps maximaux d'existence tels que l'équation (GP) admette une unique solution dans $\mathcal{C}(]-\underline{T},\bar{T}[,X^2(\mathbb{R}^d))$.
15. Montrer que $\mathcal{E}(u(t)) = \mathcal{E}(u_0)$ pour tout $t \in]-\underline{T},\bar{T}[$.
16. Montrer que $\sup_{t\in]-\underline{T},\bar{T}[} \|u(t)\|_{X_2} < +\infty$. En déduire que la solution est globale si $u_0 \in X^2(\mathbb{R}^d)$.
17. Proposer un schéma d'approximation pour étendre le résultat d'existence ci-dessus à l'espace E tout entier.