EXAMEN DU 12 JANVIER 2018
"THÉORIE DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION"

QUESTIONS DE COURS

1) Méthode des caractéristiques pour la forme forte et pour la forme conservative des équations de transport, en énonçant le théorème de Liouville (mais sans démontrer ce dernier).

2) Argument $TT^\star$ et son application aux estimations de Strichartz pour l'équation de Schrödinger.

PROBLÈME

Le but de ce problème est d'étudier l'équation d'Euler en dimension deux, qui s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 \text{ dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2, \\ u_{|t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2). \end{aligned} \tag{E}$$

On adoptera dans toute la suite la définition suivante :

Définition 1. *Soit* $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)^2)$. *On dit que* u *est une solution faible de* (E) *si* $\operatorname{div} u = 0$ *dans* $\mathcal{D}'(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2)$ *et si, pour toute fonction* $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}^2)^2$ *telle que* $\operatorname{div} \varphi = 0$, *on a*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} u \cdot \{\partial_t \varphi + u \cdot \nabla \varphi\} + \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\varphi(x, 0)\, dx = 0.$$

Dans tout le problème, on notera curl l'opérateur différentiel défini par

$$\operatorname{curl} u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1, \quad \text{pour } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)^2.$$

On cherche à démontrer le résultat suivant, dû à Yudovich :

Théorème 1. *Soit* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$ *à divergence nulle. On suppose que* $\operatorname{curl} u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. *Alors l'équation* (E) *admet une solution faible* $u \in \mathcal{C}([0, \infty[, L^2(\mathbb{R}^2)^2)$.

1 Préliminaires sur les équations de transport-diffusion

Soit ϵ un réel strictement positif quelconque. Soit $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)^2) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)^2)$ un champ de vecteurs à divergence nulle ($\operatorname{div} u = 0$), et soit $\omega_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Le but de cette première partie est de démontrer certaines propriétés des équations du type

$$\begin{aligned} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \epsilon \Delta \omega = 0 \text{ dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2, \\ \omega_{|t=0} = \omega_0 \in L^2(\mathbb{R}^2). \end{aligned} \tag{1}$$

1. Dans cette question, on suppose que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2)^2)$ et $\operatorname{div} u = 0$.
   (a) On note E_n l'ensemble $E_n = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2), \hat{\varphi}(\xi) = 0 \text{ p.p. } |\xi| \geq n\}$, et $\mathbb{P}_n$ la projection orthogonale sur E_n dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.
   Montrer qu'il existe une unique solution $\omega_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E_n)$ de l'équation

   $$\begin{aligned} \partial_t \omega_n + \mathbb{P}_n(u \cdot \nabla \omega_n) - \epsilon \Delta \omega_n = 0, \\ \omega_{n|t=0} = \mathbb{P}_n(\omega_0), \end{aligned} \tag{2}$$

   et que cette solution vérifie l'estimation d'énergie

   $$\forall t \geq 0, \quad \|\omega_n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\epsilon \int_0^t \|\nabla \omega_n(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds = \|\mathbb{P}_n(\omega_0)\|^2_{L^2} \leq \|\omega_0\|^2_{L^2}.$$

   (b) Justifier que l'on peut passer à la limite dans l'équation (2) et montrer qu'il existe une solution $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))$ au sens des distributions de l'équation (1), et que cette solution vérifie l'estimation

   $$\|\omega(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\epsilon \int_0^t \|\nabla \omega(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \leq \|\omega_0\|^2_{L^2} \tag{3}$$

   pour presque tout $t > 0$.

2. On revient à présent au cas général $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)^2) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)^2)$, div $u = 0$. En utilisant une régularisation du champ de vecteurs u, montrer l'existence d'une solution au sens des distributions de (1), vérifiant l'estimation d'énergie (3). On admettra que la solution de (1) ainsi obtenue est dans $\mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^2))$.
3. Montrer que l'équation (1) admet une unique solution au sens des distributions dans $\mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))$.
4. Soit $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^2} \rho = 1$. Pour $\delta > 0$, on pose $\rho_\delta := \delta^{-2}\rho(\cdot/\delta)$, et $\omega_\delta := \omega \star_x \rho_\delta$. Soit $\beta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ une fonction convexe positive quelconque. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ telle que $\varphi \geq 0$ et $\varphi(z) = 1$ si $|z| \leq 1$. Pour $R > 0$, on pose $\varphi_R := \varphi(\cdot/R)$.
   (a) En utilisant une variante Lemme de Di Perna-Lions donnée en appendice, montrer que
   $$\frac{d}{dt}\int \beta(\omega_\delta)\varphi_R - \int \beta(\omega_\delta) u \cdot \nabla\varphi_R + \epsilon \int \beta''(\omega_\delta)|\nabla\omega_\delta|^2\varphi_R - \epsilon \int \beta(\omega_\delta)\Delta\varphi_R = \int r_\delta \beta'(\omega_\delta)\varphi_R,$$
   où $r_\delta \to 0$ dans $L^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$.
   (b) On suppose dans cette question que $\omega_0 \geq 0$. On choisit une fonction β telle que Supp$\beta \subset]-\infty, 0]$ et telle qu'il existe $C > 0$ tel que $0 \leq \beta(z) \leq C|z|$ et $|\beta'(z)| \leq C$ pour tout z. Montrer que pour tout $t \in [0,T]$,
   $$\int \beta(\omega_\delta(t))\varphi_R \leq C\frac{t}{R}\left(\|\omega_0\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty([0,T],L^2)}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} + \epsilon\|\omega_0\|_{L^2}\|\Delta\varphi\|_{L^\infty}\right) + C\|r_\delta\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^2)}.$$
   En déduire que $\omega(t) \geq 0$ pour presque tout $t \geq 0$.
   (c) On suppose dans cette question que $\omega_0 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$. En choisissant pour β une approximation de $|\cdot|$ (à définir convenablement), montrer que pour tout $t \geq 0$,
   $$\int_{\mathbb{R}^2} |\omega(t)|\varphi_R \leq \frac{t}{R}\left(\|\omega_0\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty([0,T],L^2)}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} + \epsilon\|\omega_0\|_{L^2}\|\Delta\varphi\|_{L^\infty}\right) + \|\omega_0\|_{L^1}.$$
   En déduire que $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^2))$ et que
   $$\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,L^1)} \leq \|\omega_0\|_{L^1}.$$
5. On suppose à présent que $\omega_0 \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. En utilisant la question précédente et en raisonnant par dualité, montrer que $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ et que
   $$\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)} = \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

2 Approximation visqueuse de l'équation d'Euler

Soit $\epsilon > 0$ quelconque. On considère l'unique solution de Leray $u^\epsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)^2) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)^2)$ du système de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \partial_t u^\epsilon + u^\epsilon \cdot \nabla u^\epsilon + \nabla p^\epsilon - \epsilon\Delta u^\epsilon = 0 \text{ dans }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^2, \\ \text{div } u^\epsilon = 0 \text{ dans }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^2, \\ u^\epsilon_{|t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2). \end{aligned} \tag{NS}$$

On pose $\omega^\epsilon = \text{curl } u^\epsilon$, $\omega_0 = \text{curl } u_0$.

1. Soit $v \in H^1(\mathbb{R}^2)^2$ tel que div $v = 0$ et soit $w = \text{curl } v$. Montrer que curl $((v \cdot \nabla)v) = v \cdot \nabla w$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. (Commencer par considérer le cas $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.)

2. Justifier que ω^ϵ est solution au sens des distributions de l'équation de transport-diffusion

$$\begin{aligned} \partial_t \omega^\epsilon + u^\epsilon \cdot \nabla \omega^\epsilon - \epsilon \Delta \omega^\epsilon = 0, \\ \omega^\epsilon_{|t=0} = \omega_0. \end{aligned} \tag{4}$$

3. En utilisant les résultats de la première partie, montrer que

$$\|\omega^\epsilon(t)\|_{L^2}^2 + 2\epsilon \int_0^t \|\nabla \omega(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leq \|\omega_0\|_{L^2}^2, \|\omega^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))} \leq \|\omega_0\|_{L^1} + \|\omega_0\|_{L^\infty}. \tag{5}$$

4. Montrer que la famille $\{\partial_t \omega^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ est bornée dans $L^2([0,T], H^{-1}(\mathbb{R}^2))$ pour tout $T > 0$.
5. Montrer que la famille $\{\omega^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ est compacte dans $\mathcal{C}([0,T], w - L^2(\mathbb{R}^2))$ (c'est-à-dire : il existe une suite ϵ_k tendant vers zéro, telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \omega^{\epsilon_k}(t) f$ converge dans $\mathcal{C}([0,T])$).
   Pour cela, on pourra utiliser (sans démonstration) le fait suivant : soit $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ une famille dénombrable de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dense dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Soit B une boule quelconque de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Pour $f, g \in B$, on définit

   $$d(f,g) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^2} (f-g)\varphi_k\right|}{1 + \left|\int_{\mathbb{R}^2} (f-g)\varphi_k\right|}.$$

   Alors d est une distance sur B, et pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B, pour tout $f \in B$, $f_n \rightharpoonup f$ dans $w - L^2(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $d(f_n, f) = 0$.
6. En déduire que la famille $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est compacte dans $\mathcal{C}([0,T], w - H^1(\mathbb{R}^2))$, et donc dans $\mathcal{C}([0,T], L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$.
   On pourra utiliser le fait que si $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)^2$, il existe $\psi_1, \psi_2, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ telles que $f = \nabla\psi_1 + \nabla^\perp \psi_2 + g$.
7. En justifiant les passages à la limite dans (NS), montrer l'existence d'une solution faible de (E).

Appendice

— On admet le lemme suivant :

Lemme 2. *Soit* $u \in L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^2)^2) \cap L^2([0,T], H^1(\mathbb{R}^2)^2)$ *telle que* div $u = 0$*, et soit* $\omega \in L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^2))$*. Soit* $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ *telle que* $\int_{\mathbb{R}^2} \rho = 1$*. Pour* $\delta > 0$*, on pose* $\rho_\delta := \delta^{-2}\rho(\cdot/\delta)$*, et* $\omega_\delta := \omega \star_x \rho_\delta$*.*
On définit

$$r_\delta = \text{div } (u\omega) * \rho_\delta - \text{div } (u\omega_\delta).$$

Alors $\|r_\delta\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \to 0$.

— On rappelle également l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg dans $\mathbb{R}^2$: pour tout $p \in [2, +\infty[$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2}{p}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\frac{2}{p}}.$$