**EXAMEN DU 17 MAI 2016**
**"THÉORIE DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION"**

---

## QUESTIONS DE COURS

---

1) Énoncer et démontrer les inclusions de Sobolev pour les espaces $H^s$ (Theorem 1.2.1 page 10 des notes de cours)

2) Le théorème d'existence et d'unicité pour les équations de Navier-Stokes dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ avec données dans l'espace $\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}$ (le théorème 4.2.1 pages 50–52 des notes de cours).

## Problème

*Dans tout ce problème, on considère un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ que l'on désigne par $\Omega$. Le but est d'étudier le système $(\widetilde{NS})$ suivant problème est d'étudier l'équation*

$$(\widetilde{NS}) \left\{ \begin{array}{c} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \dfrac{1}{2} u \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \quad et \quad u_{|\partial\Omega} = 0. \end{array} \right.$$

*On posera* $\mathcal{V} \stackrel{\text{déf}}{=} (H^1_0(\Omega))^3$, $\mathcal{V}' \stackrel{\text{déf}}{=} (H^{-1}(\Omega))^3$, $\mathcal{H} \stackrel{\text{déf}}{=} (L^2(\Omega))^3$ *et pour* $u$ *dans* $\mathcal{V}'$ *et* $\varphi$ *dans* $\mathcal{V}$

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{3} \langle u^j, \varphi^j \rangle_{H^{-1} \times H^1_0}.$$

*On désigne par* $\mathbb{E}_n$ *la projection de* $\mathcal{V}'$ *sur l'espace vectoriel* $\mathcal{H}_n$ *le produit trois fois de l'espace vectoriel engendré par les* $n+1$ *premiers vecteurs propres du laplacien du Dirichlet sur* $\Omega$ *et on pose* $\mathcal{H}_n \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}_n \mathcal{H}$. *On appellera solution faible de* $(\widetilde{NS})$ *toute fonction* $u$ *de l'espace*

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{déf}}{=} C(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}') \cap L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V})$$

*qui vérifie, pour toute fonction* $\varphi$ *de* $C^1(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ *et pour tout* $T$ *de* $]0, \infty[$,

$$\begin{aligned} \langle u(t), \varphi(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \langle u_0, \varphi(0) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &+ \int_0^T \sum_{1 \leq j,k \leq 3} \int_\Omega u^j(t,x) \partial_k u^k(t,x) \varphi^k(t,x) dt dx \\ + \int_0^T \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \operatorname{div} u(t,x) u^j(t,x) \varphi^j(t,x) dt dx &+ \int_0^T \langle \Delta\varphi(t) + \partial_t \varphi, u(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \, dt\,. \end{aligned}$$

*On rappelle que* $\|a\|_{(L^3(\Omega))^3} \leq C \|a\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}} \|a\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{V}}$ *et que* $\|a\|_{(L^6(\Omega))^3} \leq C \|a\|_{\mathcal{V}}$.

1) Démontrer que l'espace $(L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^3$ est continûment inclus dans $\mathcal{V}'$.

2) En déduire que $\|a \cdot \nabla b\|_{\mathcal{V}'} \leq C \|a\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}} \|a\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{V}} \|b\|_{\mathcal{V}}$.

3) Démontrer que, pour tout $n$, il existe une unique fonction $u_n$ continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathcal{H}_n$ qui vérifie

$$\begin{gathered} \frac{du_n}{dt} + \mathbb{E}_n(u_n \cdot \nabla u_n) - \Delta u_n + \frac{1}{2} \mathbb{E}_n((\operatorname{div} u_n) u_n) = 0 \quad \text{et} \\ \frac{1}{2} \|u_n(T)\|^2_{\mathcal{H}} + \int_0^T \|u_n(t)\|^2_{\mathcal{V}} \, dt = \frac{1}{2} \| \mathbb{E}_n u_0 \|^2_{\mathcal{H}}. \end{gathered}$$

4) Démontrer que, $\forall T > 0$, la suite $\left( \dfrac{du_n}{dt} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de l'espace $L^{\frac{4}{3}}([0,T]; \mathcal{V}')$.

5) Démontrer qu'il existe une fonction $u$ de $\mathcal{E}$ telle que,

$$\begin{gathered} \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V})\,, \ \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^+} (u_n(t) | \varphi(t))_{\mathcal{V}} \, dt = \int_{\mathbb{R}^+} (u(t) | \varphi(t))_{\mathcal{V}} \, dt \quad \text{et} \\ \forall T > 0\,, \ \lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_{\mathcal{V}'} = 0. \end{gathered}$$

6) Que peut-on en déduire ?