

Le but de ce cours est de présenter des résultats récents sur la présence de couches limites fluides près de frontières rugueuses.

On étudiera en particulier les questions suivantes:

- Existence de la solution du problème de couche limite;
- Choix de l'espace fonctionnel;
- Comportement de la couche limite loin du bord rugueux;
- Justification de l'Ansatz de couche limite.
- Lois de paroi.

On se concentrera sur deux problèmes:

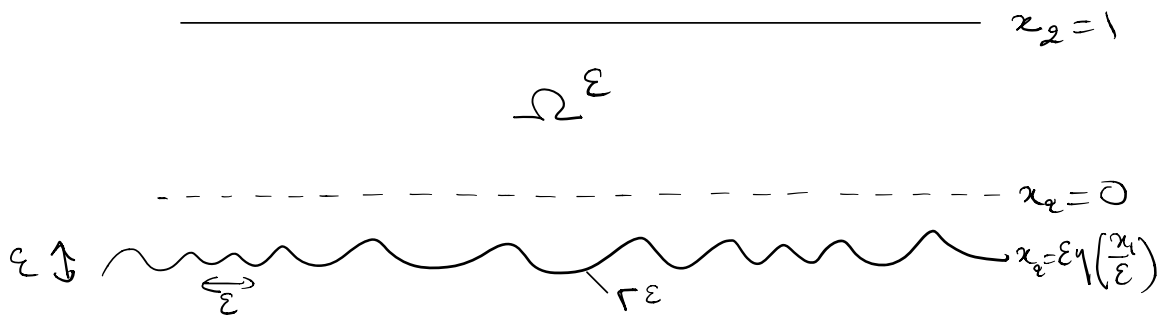
- Le système de Stokes dans un canal rugueux, (ou de Navier-Stokes) pour lequel de nombreux calculs explicites sont possibles
- Les couches limites d'Ekman, près de frontières rugueuses.

PARTIE 1: Système de Navier-Stokes dans un canal rugueux.

Dans toute cette partie, on considère le système

$$(NS^\varepsilon) \begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ \int_{\partial \Omega^\varepsilon} u^\varepsilon_\perp = \phi & \text{(condition de flux)} \end{cases}$$

où $\phi \in \mathbb{R}$, $\Omega^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon \eta(\frac{x_1}{\varepsilon}) < x_2 < 1\}$, où $\eta: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 0[$ est une fonction lipschitzienne.



On munit (NS^ε) des conditions aux bords suivantes:

$$(CL^\varepsilon) \begin{cases} u^\varepsilon|_{x_2=1} = 0 \\ u^\varepsilon \cdot \nu|_{\Gamma^\varepsilon} = 0 \quad (\text{non-pénétration}) \\ (\operatorname{Id} - \nu \otimes \nu) u^\varepsilon|_{\Gamma^\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (\operatorname{Id} - \nu \otimes \nu) \underbrace{\operatorname{Du}^\varepsilon \nu|_{\Gamma^\varepsilon}}_{\substack{\text{partie symétrique} \\ \text{du gradient}}} \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} \Gamma^\varepsilon = \{x_2 = \varepsilon \gamma(\frac{x_1}{\varepsilon})\} \\ \lambda^\varepsilon \geq 0 \\ \nu: \text{normale ext\u00e9rieure \u00e0 } \Gamma^\varepsilon \end{cases}$$

Remarque: $\lambda^\varepsilon = 0$: non glissement (condition de Dirichlet sur Γ^ε)

$\lambda^\varepsilon = +\infty$: glissement parfait

$\lambda^\varepsilon \in]0, +\infty[$: longueur de glissement.

Dans la suite, on \u00e9tudiera principalement le cas $\lambda^\varepsilon = 0$, en mentionnant comment les r\u00e9sultats \u00e9nonc\u00e9s peuvent s'\u00e9tendre au cas $\lambda^\varepsilon > 0$.

I) Analyse formelle

• Int\u00e9rieur du domaine fluide:

Si $u^\varepsilon \rightarrow u^0$, on s'attend \u00e0 avoir

$$(NS^0) \begin{cases} -\Delta u^0 + (u^0 \cdot \nabla) u^0 + \nabla p^0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u^0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \int_0^1 u_1^0(x_1, x_2) dx_2 = \phi \end{cases}$$

$$\text{ou } \Omega = \{x \in \mathbb{R}^d, 0 < x_2 < 1\},$$

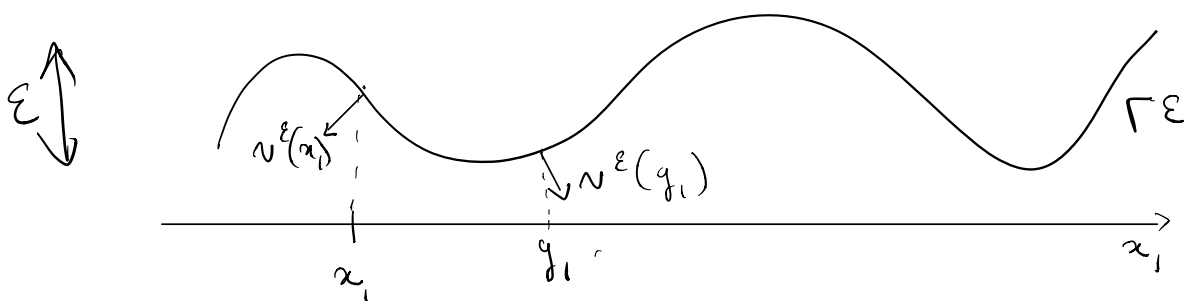
$$\text{avec } u^0|_{x_2=1} = 0.$$

• Condition en $x_2 = 0$:

Si $\lambda^\varepsilon = 0$, et donc que $u^\varepsilon|_{\Gamma^\varepsilon} = 0$, on s'attend simplement à avoir $u^0|_{x_2=0} = 0$.

Si $\lambda^\varepsilon > 0$, c'est un peu plus compliqué... et cela va dépendre de la nature de Γ^ε :

Zoom:



La normale n^ε en $(x_1, \varepsilon \eta(\frac{x_1}{\varepsilon}))$ est proportionnelle à $(\eta'(\frac{x_1}{\varepsilon}), -1)$

Si on a $u^\varepsilon \simeq u^0$ dans un voisinage de Γ^ε , on s'attend à avoir

$$u^0(x_1, \varepsilon \eta(\frac{x_1}{\varepsilon})) \cdot (\eta'(\frac{x_1}{\varepsilon}), -1) \simeq 0$$

$$u^0(x_1, 0) \cdot (\eta'(\frac{x_1}{\varepsilon}), -1) \simeq 0.$$

Considérons le cas où η est périodique pour fixer les idées. Si $\eta = \text{cte}$, on obtient simplement

$$u^0_2(x_1, 0) = 0 : \text{non pénétration}$$

(mais dans ce cas il n'y a pas de micro-structure...)

En revanche, si γ est une fonction périodique non constante, en découplant les variables on obtient

$$\begin{cases} u^0(x_1, 0) \cdot (\gamma'(y), -1) = 0 \\ \forall y \in \pi \end{cases}$$

et donc nécessairement $u^0(x_1, 0) = 0$ (orthogonalité à au moins 2 vecteurs non colinéaires).

Dans toute la suite, dans le cas $\lambda^\varepsilon > 0$, on travaillera avec des rugosités "non dégénérées" (dans un sens que l'on précisera) pour lesquelles la condition limite est

$$u^0|_{x_2=0} = 0.$$

(NS⁰) est donc muni des conditions de Dirichlet $u^0|_{x_2=0} = u^0|_{x_2=1} = 0$

Une solution particulière du système est le flot de Poiseuille:

$$\begin{cases} u^0(x_1, x_2) = (6\phi x_2(1-x_2), 0) \\ p^0(x_1, x_2) = 12\phi x_2. \end{cases}$$

On peut montrer que c'est l'unique solution si ϕ est suffisamment petit.

- Couche limite: On voit immédiatement que $u^0|_{\Gamma^\varepsilon} \neq 0$. Plus précisément, $u^0|_{\Gamma^\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

On s'attend donc à devoir corriger u^0 près de Γ^ε par un terme de couche limite, ayant les caractéristiques suivantes:

- Oscillations rapides en x_1 , à cause de la rugosité;
- Décroissance rapide loin du bord.

Plus précisément, on prend l'Ansatz suivant:

$$(A) \quad u^\varepsilon(x_1, x_2) \simeq u^0(x_1, x_2) + \varepsilon u^{BL}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right).$$

$x_1 = \text{paramètre}$

À l'ordre principal (ε^{-1}), on obtient l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u^{BL} + \nabla p^{BL} = 0 & \text{dans } \Omega^{bl} \\ \operatorname{div} u^{BL} = 0 & \text{dans } \Omega^{bl} \end{cases}$$

où Ω^{bl} est le demi-plan borné:

$$\Omega^{bl} = \{y \in \mathbb{R}^2, y_2 > \gamma(y_1)\}$$

⚠ Domaine non borné dans les 2 directions.

Condition sur $\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^2, y_2 = \gamma(y_1)\}$:

- Si $\lambda_\varepsilon = 0$, on choisit simplement u^{BL} pour que la condition de Dirichlet soit vérifiée à l'ordre principal :

$$u^0(x_1, \varepsilon \gamma(\frac{x_1}{\varepsilon}))_z + \varepsilon u^{BL}(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{\gamma(x_1)}{\varepsilon}) \approx 0.$$

$$\begin{aligned} \text{On } u^0(x_1, \varepsilon \gamma(\frac{x_1}{\varepsilon})) &= u^0(x_1, 0) \\ &+ \varepsilon \gamma(\frac{x_1}{\varepsilon}) \partial_2 u^0(x_1, 0) \\ &+ O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\text{et } \partial_2 u^0(x_1, 0) = -\partial_1 u^0(x_1, 0) = 0.$$

On obtient donc

$$u^{BL}(x_1; y_1, \gamma(y_1)) = -\gamma(y_1) (\partial_2 u^0(x_1, 0), 0)$$

Dans le cas du flot de Poiseuille, $\partial_2 u^0|_{x_2=0} = 6\phi$, mais le calcul ci-dessus éclairera l'apparition de la couche limite de type Navier.

Par linéarité, on obtient donc

$$u^{BL}(x_1; y) = \partial_2 u^0(x_1, 0) v(y)$$

où v est solution de

$$(BL) \begin{cases} -\Delta v + \nabla q = 0 & \text{dans } \Omega^{sl} \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{dans } \Omega^{sl} \\ v(y) = -\eta(y_1) (1, 0) = -\eta_2(1, 0) \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Si $\lambda^\varepsilon > 0$, la condition va dépendre du régime de λ^ε par rapport à ε ... On se concentre ici sur le cas $\lambda^\varepsilon \equiv \lambda^0 > 0$ pour simplifier la présentation. Dans ce cas, on peut vérifier que la condition sur Γ devient

$$(\mathbb{D}(v)v)_\tau = -(\mathbb{D}(\eta_2, 0)v)_\tau.$$

Les questions que l'on considèrera dans la suite sont les suivantes:

- Le système (BL) est-il bien posé?
- Quel est le comportement quand $y_2 \rightarrow \pm\infty$ des solutions de (BL)?
- Peut-on justifier l'Ansatz (A)?
- Quelles conclusions peut-on en tirer quant aux lois de paroi pour le système limite?

II) Analyse du cas périodique:

Ref: Achdou - Pironneau - Valentin ; '97, '98
Jäger - Mikelić ; '01, '03
Amirat - Bresch - Lemaire - Simon ; '01

Si $\gamma \in W^{1,\infty}(\mathbb{T})$, l'analyse de (B) est assez classique: on utilise une formulation variationnelle pour montrer l'existence et l'unicité de solutions de (B) dans l'espace

$$\int_{\mathbb{T}} \int_{\gamma(y_1)}^{+\infty} |\nabla v|^2 dy_2 dy_1 < +\infty.$$

De plus, pour $y_2 > 0$, on peut décomposer v en séries de Fourier (en y_1): on obtient

$$\begin{aligned} (-\partial_2^2 + |k|^2) \hat{v}(k, y_2) + \begin{pmatrix} ik \\ \partial_2 \end{pmatrix} \hat{q}(k, y_2) &= 0 \\ (ik \hat{v}_1 + \partial_2 \hat{v}_2) &= 0 \end{aligned}$$

En éliminant la pression, on obtient:

$$\text{- Si } k=0: \hat{v}(0, y_2) = \hat{v}(0, 0) = (\alpha, 0)$$

$$\text{- Si } k \neq 0: \quad (-\partial_2^2 + |k|^2)^2 \hat{v}_2(k, y_2) = 0$$

↑
condition de
divergence nulle
+ non-pénétration

Donc $\widehat{v}_2(k, 0) = (A_k y_2 + B_k) e^{-|k| y_2}$;
 décroissance exponentielle.

\leadsto Convergence exponentielle vers la constante $(\alpha, 0)$.

On peut alors montrer la validité de l'Ansatz (A):

$$u^0(x) + \varepsilon \partial_2 u'_0(x, 0) v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

est une solution approchée de (NS^ε) :

- terme d'erreur de la forme $\operatorname{div}\left(\varepsilon G\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$,
 où $G(x, y_1, y_2)$ est périodique en y_1 , exponentiellement
 décroissant en $y_2 \leadsto$ Taille $\varepsilon^{+3/2}$ dans H^{-1}
- erreur sur les conditions au bord:

En $x_2 = 1$: $+\varepsilon \partial_2 u'_0(x, 0)(\alpha, 0) +$ terme exponentiellement petit

sur Γ_ε : $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

- erreur sur le terme de flux:

$$+\varepsilon \partial_2 u'_0(x, 0) \alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

~~///~~ relevés grâce à un correcteur intérieur
 $\varepsilon u'(x, 0)$ qui va vérifier l'équation
 linéarisée autour de u^0 avec

$$u'_{|x_2=1} = -\partial_2 u'_0(x, 0)(\alpha, 0), u'_{|x_2=0} = 0,$$

$$\int_0^1 u'_1(x_1, x_2) dx_2 = -\partial_2 u'_0(x_1, 0) \alpha$$

/// : relevés par un correcteur $r^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^\varepsilon)$ dans L^2 .
(sauf terme d'erreur intérieur, auquel on ne touche pas).

On en déduit que

$$u_{\text{app}}^\varepsilon = u^0(x) + \varepsilon \partial_2 u'_0(x_1, 0) v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1(x) + r^\varepsilon(x)$$

vérifie exactement les conditions au bord et la condition de flux, et l'équation avec un terme d'erreur $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ dans H^{-1} .

Estimation d'énergie (pas détaillée ici) :

$$\|u^\varepsilon - u_{\text{app}}^\varepsilon\|_{H^1} \leq C \varepsilon^{3/2}$$

(cf plus bas, estimations dans des domaines non bornés)

Par ailleurs, on considère la solution u^N du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u^N + u^N \cdot \nabla u^N + \nabla p^N = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u^N = 0 & \text{dans } \Omega \\ u^N|_{x_2=1} = 0, \quad u^N|_{x_2=0} = 0, \quad \underbrace{u^N_1 = \varepsilon \alpha \partial_2 u^N_1}_{\text{condition de Navier}} \text{ en } x_2 = 0 \end{cases}$$

Un calcul explicite montre que

$$\begin{aligned} u_{\text{app}}^\varepsilon - u^N &= \varepsilon \partial_2 u'_0(x_1, 0) \left(v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - (x, 0) \right) + r^\varepsilon \mathbb{1}_\Omega + \mathcal{O}(\varepsilon^\varepsilon) \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \text{ dans } L^2 \end{aligned}$$

On en déduit finalement

$$\|u^\varepsilon - u^N\|_{L^2} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$$

alors que $\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2} = \mathcal{O}(\varepsilon)$: on gagne un facteur $\sqrt{\varepsilon}$ grâce à la loi de Navier en $x_2 = 0$.

Remarque: Espaces fonctionnels:

Plus haut, on a écrit H^1, L^2 sans précision. On a Ω^ε est non borné en x_2 , et les solutions ne décroissent pas quand $|x_2| \rightarrow \infty \dots$

2 possibilités:

a) On prend $\varepsilon = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, et

$$\Omega^\varepsilon = \left\{ x_1 \in \mathbb{T}, x_2 \in \mathbb{R}, \varepsilon \eta\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) < x_2 < 1 \right\}$$

On prend alors des normes classiques $H^1(\Omega^\varepsilon)$, $L^2(\Omega^\varepsilon)$.

b) Si Ω^ε est vraiment non borné: il faut travailler avec les espaces H_{uloc}^s : on prend une fonction $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ dans un voisinage de zéro, et on se donne une partition de l'unité

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(\cdot - k)$$

On définit alors H^s_{uloc} par :

$$\|u\|_{H^s_{uloc}(\Omega^\varepsilon)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\chi(\cdot - k) u\|_{H^s(\Omega^\varepsilon)}$$

$$\text{et } H^s_{uloc}(\Omega^\varepsilon) = \left\{ u \in H^s_{loc}(\Omega^\varepsilon), \|u\|_{H^s_{uloc}(\Omega^\varepsilon)} < +\infty \right\}$$

Les estimations d'énergie dans les espaces H^s_{uloc} sont plus difficiles à obtenir... On utilise une idée de Ladyzhenskaya & Solonnikov : estimation dans un domaine $\Omega^\varepsilon \cap \{|x_1| \leq n\}$, avec $n \gg 1$, puis récurrence descendante.

Conclusion / Remarque :

- On justifie la présence de la couche limite via une estimation d'énergie.
- L'utilisation d'une loi de Navier sur une paroi fictive en $x_2 = 0$ améliore le taux de convergence quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Parfois, on lit l'interprétation suivante : "la rugosité crée / améliore le glissement sur la paroi, avec une longueur de glissement proportionnelle à ε ". Il est alors naturel de se demander si certains profils

de rugosité maximisant le glissement.

Mais cette interprétation est fautive!

Ref: Bueau, D., Gérard-Varet, 2012:

Le problème est le suivant: étant donné $\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{T})$, on définit v_η solution de

$$\begin{cases} -\Delta v_\eta + \nabla p_\eta = 0 & \text{dans } \Omega_\eta \\ \operatorname{div} v_\eta = 0 & \text{dans } \Omega_\eta \\ v_\eta + (y_2, 0)|_{\Gamma_\eta} = 0 \end{cases}$$

où $\Omega_\eta = \{y \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, y_2 > \eta(y_1)\}$

$\Gamma_\eta = \partial \Omega_\eta = \{y_2 = \eta(y_1)\}$.

On cherche à maximiser

$$\lim_{y_2 \rightarrow +\infty} v_{\eta,c}(y_1, y_2) = \langle v_{\eta,c}(y_1, c) \rangle,$$

où $c \in \mathbb{R}$ est tel que $c > \sup \eta$.

Ce problème n'a de sens que si $\langle \eta \rangle$ est prescrit: en effet, pour tout $H \in \mathbb{R}$, on vérifie facilement que

$$\begin{cases} v_{\eta+H}(y_1, y_2) = v_\eta(y_1, y_2 - H) - (H, 0) \\ \forall y \in \Omega_{\eta+H} \end{cases}$$

On maximise donc plutôt

$$\alpha(\eta) := \lim_{y_2 \rightarrow +\infty} (v_{\eta,1}(y_1, y_2) + \langle \eta \rangle)$$

On a alors le résultat suivant:

Proposition:

$$\sup_{\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{T})} \alpha(\eta) = \alpha(0) = 0 \quad < +\infty.$$

Preuve: Afin de travailler avec des conditions au bord homogènes, on pose

$$u_\eta = v_\eta + (y_2, 0) \mathbb{1}_{y_2 < 0}.$$

Sans perte de généralité, on peut restreindre l'étude à des profils η tels que $\sup \eta < 0$ (à cause de l'invariance par translation)

Alors u_η résout, en posant $\Sigma = \mathbb{T} \times \{0\}$

$$\begin{cases} -\Delta u_\eta + \nabla q_\eta = 0 & \text{dans } \Omega_\eta \setminus \Sigma \\ \operatorname{div} u_\eta = 0 & \text{dans } \Omega_\eta \\ u_\eta|_{\Gamma_\eta} = 0 \\ \left[\partial_2 u_\eta - q_{\eta,2} \right]_{\Sigma} = -(1, 0) \end{cases}$$

On vérifie aisément que

$$\int_{\Omega_\eta} |\nabla u_\eta|^2 - \int_{\Sigma} u_{\eta,1} = 0$$

$$\text{et } \alpha(\eta) = \frac{1}{|\mathbb{T}|} \left(\int_{\Sigma} u_{\eta,1} + \int_{\mathbb{T}} \eta \right).$$

Par ailleurs,

$$u_\eta(y_1, 0) = \int_{\eta(y_1)}^0 \partial_2 u_\eta(y_1, y_2) dy_2$$

$$|u_\eta(y_1, 0)| \leq \left(\int_{\eta(y_1)}^0 |\partial_2 u_\eta|^2(y_1, y_2) dy_2 \right)^{1/2} |\eta(y_1)|^{1/2}$$

$$\text{Donc } \left| \int_{\mathbb{T}} u_\eta(y_1, 0) dy_1 \right| \leq \left| \int_{\mathbb{T}} \eta \right|^{1/2} \left(\int_{\Omega_\eta} |\nabla u_\eta|^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{Or } \int_{\mathbb{T}} u_{\eta,1}(y_1, 0) dy_1 = \int_{\Omega_\eta} |\nabla u_\eta|^2 \leq \left| \int_{\mathbb{T}} \eta \right|^{1/2} \left(\int_{\Omega_\eta} |\nabla u_\eta|^4 \right)^{1/2}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\int_{\Omega_\eta} |\nabla u_\eta|^2}_{\int_{\mathbb{T}} u_\eta''(y_1, 0)} \leq \left| \int_{\mathbb{T}} \eta \right|$$

$$\text{Finalement, } \alpha(\eta) \leq \langle \eta \rangle + |\langle \eta \rangle| = 0$$

$$\text{Donc } \sup_{\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{T})} \alpha(\eta) \leq 0$$

Par ailleurs, on observe que pour $\eta \equiv 0$, on a $v_\eta = 0$ et donc $\alpha(\eta) = 0$.

$$\text{Donc } \sup_{\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{T})} \alpha(\eta) = \alpha(0) = 0 \quad \blacksquare$$

Autrement dit, la longueur de glissement effective maximale est obtenue pour un fond plat ... (et en ce cas elle est nulle)

Il ne faut voir la loi de paroi de type Navier que comme un outil de calcul, pas la traduction d'un effet physique d'augmentation du glissement.

III) Analyse du cas stationnaire:

Qu'est-ce qui change par rapport au cas périodique?

- Le caractère bien posé du système (BL) est nettement moins évident. Même l'espace fonctionnel dans lequel travailler n'est pas clair ...

- On ne s'attend plus à avoir convergence exponentielle vers une constante du terme de couche limite \rightarrow perte dans les estimations d'erreur.

Résultats: Réf: Gérard - Varet & Masmoudi

D. & Gérard - Varet

Gérard - Varet & Basson

- Si $\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, le système (BL) est bien posé dans l'espace

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in H_{loc}^1(\Omega^{\varepsilon}), \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \int_{\omega(y_1)}^{+\infty} |v|^2 dy_2 dy_1 < +\infty \right\}$$

→ Résolution déterministe.

- Si on veut avoir convergence vers une constante en $+\infty$, il faut un peu de structure...

On suppose $\eta = \eta(y_1, \omega)$, $\omega \in (\mathbb{E}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, muni d'un groupe de transformations $(\tau_y)_{y \in \mathbb{R}}$ préservant la mesure \mathbb{P} .

On suppose que η est stationnaire:

$$\begin{cases} \eta(y_1 + y_1', \omega) = \eta(y_1, \tau_{y_1'} \omega) \\ \text{p.s } \omega, \forall y_1, y_1' \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En ce cas, on a convergence vers une constante de la solution de (BL), mais la vitesse de convergence peut être arbitrairement lente.

On obtient alors une loi de Navier avec

$$\|u^\varepsilon - u^N\|_{L_{loc}^2(\Omega^\varepsilon)} = o(\varepsilon) \quad \left(\begin{array}{l} \text{au lieu de} \\ \mathcal{O}(\varepsilon^{3/4}) \text{ dans} \\ \text{le cas périodique} \end{array} \right)$$

1) Analyse du système de couche limite:

Il y a deux difficultés:

- ⊗ Le domaine est non borné en y_1 , et on cherche

des solutions d'énergie infinie.

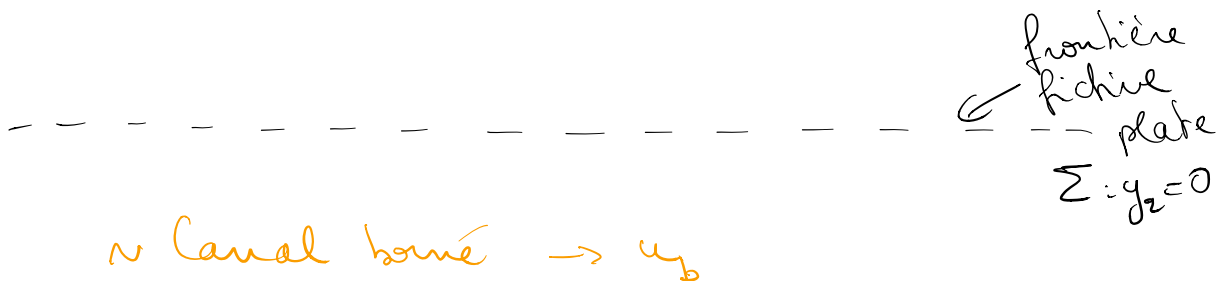
⊗ Les variations spatiales de γ interdisent de passer directement en Fourier.

On sépare les deux difficultés de la façon suivante:

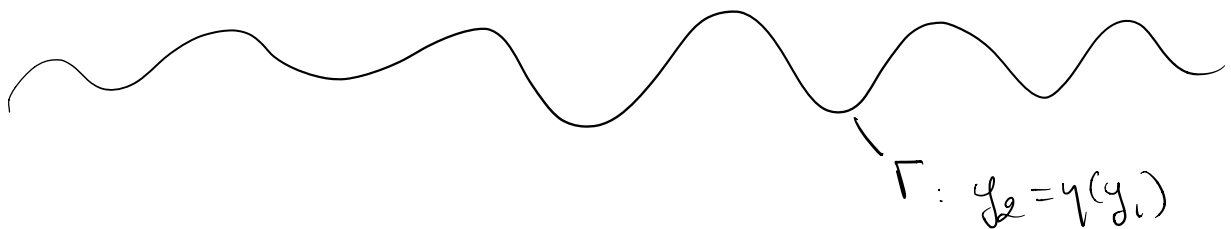
a) On étudie le cas d'un fond plat
→ on peut passer en Fourier

b) Pour un fond quelconque, on décompose le domaine en deux:

Résolution en Fourier → u_{flat}



n Canal borné → u_b



On écrit ensuite que la solution u et sa dérivée normale sont continues:

$$\begin{cases} u_{\text{flat}}|_{\Sigma^+} = u_b|_{\Sigma^-} \\ \partial_2 u_{\text{flat}}|_{\Sigma^+} = \partial_2 u_b|_{\Sigma^-} \end{cases}$$

Or, pour $y_2 > 0$, $u_{\text{flat}} = \mathcal{S}(u_{\text{flat}}|_{\Sigma^+})$
 $= \mathcal{S}(u_b|_{\Sigma^-})$

où \mathcal{S} est l'opérateur de Stokes dans un demi-plan.

Donc $\partial_2 u_{\text{flat}}|_{\Sigma^+} = \underbrace{\text{DN}}_{\substack{\text{opérateur} \\ \text{Dirichlet-to-Neumann}}}(u_b|_{\Sigma^-}) = \partial_2 u_b|_{\Sigma^-}$

Dans $\Omega^- = \Omega^{\text{bl}} \cap \{y_2 < 0\}$, on résout donc le système de Stokes avec comme condition sur Σ

$$\begin{aligned} \partial_2 u_b|_{\Sigma^-} &= \text{DN}(u_b|_{\Sigma^-}) \\ &= \text{condition transparente.} \end{aligned}$$

Reste à comprendre:

- La réduction du système de Stokes dans \mathbb{R}_+^2 , avec données $H_{\text{loc}}^S(\mathbb{R})$, et la définition de DN dans ce cadre ;

- L'obtention d'estimations a priori dans Ω^- avec la condition au bord transparente.

a) Système de Stokes dans un demi-espace :

→ Mêmes calculs que dans le cas périodique, mais plus de trou spectral.

On trouve (en Fourier)

$$\hat{u}_g(\xi, y_2) = (A(\xi)y_2 + B(\xi)) e^{-|\xi|y_2}$$

et on obtient u_1, p par la condition de divergence nulle + équation.

Autre représentation: noyau de Poisson:

$$\left. \begin{aligned} u(y) &= \int_{\mathbb{R}} G(t, y_2) u_0(y_1 - t) dt \\ p(y) &= \int_{\mathbb{R}} \nabla g(t, y_2) \cdot u_0(y_1 - t) dt \end{aligned} \right\} \text{a un sens pour } u_0 \in L^2_{loc}$$

$$G(y) = \frac{2y_2}{\pi |y|^4} \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & y_2^2 \end{pmatrix}$$

$$g = -\frac{2y_2}{\pi |y|^2}$$

→ Existence et unicité d'une solution telle

$$\text{que } \sup_{b \in \mathbb{Z}} \int_b^{b+1} \int_0^{+\infty} |\nabla u|^2 < +\infty.$$

Définition de l'opérateur Dirichlet-à-Neumann:

Pour des données au bord dans $H^{1/2}(\mathbb{R})$, on a deux définitions possibles:

- En Fourier:

$$\widehat{DN}(u_0)(\xi) = \begin{pmatrix} -2|\xi| & -i\xi \\ i\xi & -2|\xi| \end{pmatrix} \widehat{u}_0(\xi)$$

- À l'aide d'un noyau intégral:

$$DN(u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}} -\frac{2}{\pi t^2} u_0(x-t) dt \quad \begin{matrix} \text{(mais} \\ \text{singularité} \\ \text{en } t=0 \dots \end{matrix}$$

\rightarrow ok si $u_0(x) = 0$

Pour des données au bord dans $H_{\text{uloc}}^{1/2}(\mathbb{R})$, on utilise ces deux définitions. Plus généralement:

Ref: Alazard - Burq - Zuily:

Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\chi \equiv 1$ sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ et

$\text{Supp } \chi \subset [-1, 1]$, et tel qu'on ait une partition de l'unité

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(\cdot - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_k$$

On écrit $u_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\chi_k u_0}_{\in H^{1/2}}$

Si $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est un symbole tel que $\exists m \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists C_\alpha, |a^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{m-\alpha}$, on définit

$a(D): H^s \rightarrow H^{s-m} \quad \forall s \in \mathbb{R}$

$$a(D)u_0 = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \chi_l \underbrace{a(D)(\chi_k u_0)}_{\in H^{1/2-m}}$$

Il faut vérifier que la somme est convergente dans $H_{\text{loc}}^{1/2-m}$. Autrement dit, il faut vérifier

que $\sup_{l \in \mathbb{Z}} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_l a(D)(\chi_k u_0) \right\|_{H^{1/2-m}} < \infty$.

On coupe la somme en deux ($l \in \mathbb{Z}$ fixé) :

* Si $|k-l| \leq 4$: on utilise la représentation en Fourier \rightarrow partie locale de l'opérateur

$$\|\chi_l a(D)(\chi_k u_0)\|_{H^{1/2-m}}$$

$$\leq C \|\chi_k u_0\|_{H^{1/2}} \leq C \|u_0\|_{H_{\text{loc}}^{1/2}}$$

* Si $|k-l| > 4$: on repasse dans l'espace physique en utilisant la représentation avec un noyau intégral. \rightarrow partie non-locale de l'opérateur.

On écrit

$$\chi_l a(D)(\chi_k u_0)(x) = \int \chi_l(x) \chi_k(y) e^{i(x-y)\xi} a(\xi) u_0(y) dy d\xi$$

$$|x-y| \approx |k-l| \geq 2$$

Observation: $\int (x-y) e^{i(x-y)\xi} a(\xi) d\xi$
 $= -\frac{1}{i} \int e^{i(x-y)\xi} a'(\xi) d\xi$

et en itérant, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & (x-y)^m \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi} a(\xi) d\xi \\ &= (i)^m \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi} a^{(m)}(\xi) d\xi \leq C_m \text{ pour } m \\ & \text{assez grand.} \end{aligned}$$

Donc pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |\chi_\ell a(D) \chi_k u_0(x)| &\leq C_m \int \chi_\ell(x) \chi_k(y) \frac{1}{|x-y|^m} dy \\ &\leq \frac{C_m}{|k-\ell|^m} \end{aligned}$$

(idem avec les dérivées en x).

$$\text{Donc } \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ |k-\ell| \geq 4}} \|\chi_\ell a(D) \chi_k u_0\|_{H^s} \leq C_s \text{ pour tout } s \geq 0$$

+ **lemme D. Gérard-Varet**.

Dans le cas de l'opérateur Dirichlet-Neumann, on en déduit

$$\text{DN: } H_{\text{uloc}}^{1/2}(\mathbb{R}) \longrightarrow H_{\text{uloc}}^{-1/2}(\mathbb{R})$$

b) Résolution du problème de Stokes dans un canal borné avec condition au bord transparente:



$$\Gamma: y_2 = y_2(x)$$

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ u|_{\Gamma} = u_0 \in H^s_{\text{uloc}} \\ (\partial_2 u - p e_2)|_{\Sigma} = DN(u|_{\Sigma}) \end{cases}$$

où DN est l'opérateur Dirichlet - à - Neumann du système de Stokes dans un demi-espace -

La difficulté est d'obtenir des estimations d'énergie dans ce domaine non borné en y_1 (le caractère borné en y_2 permet de récupérer une inégalité de Poincaré).

Explication sur un toy model :

$$-u'' + u = f \in L^\infty(\mathbb{R})$$

? Existence / unicité d'une solution dans H^1_{uloc} ?

On commence par résoudre

$$\begin{cases} -u_m'' + u_m = f & \text{dans } [-m, m] \\ u_m(m) = u_m(-m) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_{-m}^m |u_m'|^2 + \int_{-m}^m |u_m|^2 = \int f u_m \leq \|f\|_\infty \sqrt{m} \left(\int_{-m}^m |u_m|^2 \right)^{1/2}$$

$$\rightarrow \|u_m\|_{H^1(-m, m)}^2 \leq C m$$

Ensuite: on pose $I_k = (-k, k)$,
 $E_k = \|u_n\|_{H^1(-k, k)}^2$.

On montre par récurrence sur k qu'il existe $C' \geq C$
 telle que $E_k \leq C' k \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$

Pour cela, on multiplie l'équation par $\chi_k u_n$,
 avec $\chi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\chi_k \equiv 1$ sur $[-k, k]$, $\text{Supp } \chi_k \subset [-k-1, k+1]$.

$$\begin{aligned} E_k &\leq \int \chi_k (u_n'^2 + u_n^4) = \int f \chi_k u_n - \int u_n' u_n \chi_k' \\ &\leq \|f\|_\infty \sqrt{k+1} E_{k+1}^{1/2} + C (E_{k+1} - E_k) \\ &\leq \|f\|_\infty \sqrt{C'} (k+1) + C (E_{k+1} - E_k) \quad (\text{par récurrence}) \end{aligned}$$

Si $E_k > C' k$: $E_{k+1} - E_k \leq C'$

Donc $C' k < \|f\|_\infty \sqrt{C'} (k+1) + C C'$
 $(\sqrt{C'} - \|f\|_\infty) k \leq \|f\|_\infty + C \sqrt{C'}$

Si $k > \frac{\|f\|_\infty + C \sqrt{C'}}{\sqrt{C'} - \|f\|_\infty}$ ($\sqrt{C'} > \|f\|_\infty$ WLOG),

on aboutit à une contradiction.

Et si $k \leq \frac{\|f\|_\infty + C \sqrt{C'}}{\sqrt{C'} - \|f\|_\infty} =: K$

on a $E_k \leq E_{\lfloor K \rfloor + 1} \leq C' (\lfloor K \rfloor + 1)$.

Donc quitte à choisir C' plus grand, on a bien

$$E_k \leq C' |k| \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, $E_1 \leq C'$. En répétant cette opération sur $[l-2m, l+2m]$, avec $l \in [-m, m]$ quelconque, on obtient une borne H^1_{uloc} sur u_m , puis sur u par passage à la limite.

2) Comportement à l'infini du problème de couche limite, loi de paroi de type Navier:

Pour obtenir le comportement à l'infini de la solution de (BL) dans le cas où u_0 n'est pas périodique, le plus simple est d'utiliser la formule avec le noyau de Poisson:

$$u(y_1, y_2) = \int_{\mathbb{R}} G(t, y_2) u_0(y_1 - t) dt,$$

$$u_0 = u|_{y_2=0} \in L^2_{uloc}.$$

$$G(y) = \frac{2y_2}{\pi |y|^4} \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & y_2^2 \end{pmatrix}$$

= homogène de degré -1

$$u(y_1, y_2) = \int_{\mathbb{R}} G(\zeta, y_2) u_0(y_1 - \underbrace{y_2 \zeta}_{\gg 1}) d\zeta$$

\approx homogénéisation : on moyenne u_0 .

Mais pour que l'opération de moyennisation se passe correctement, il faut un théorème ergodique: on peut construire des $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ tels que $u(y_1, y_2)$ ne converge pas quand $y_2 \rightarrow +\infty$.

→ On suppose que η est stationnaire (cf cadre rappelé précédemment.) On montre alors facilement que $u(y_1, y_2; \omega)$ est stationnaire également, pour tout $y_2 \geq 0$. (unicité du pb de Stokes).
En particulier, u_0 est stationnaire.

En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} u(y_1, y_2; \omega) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t G(t, y_2) \left(\int_0^t u_0(y_1 - s) ds \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (t \partial_t G(t, y_2)) \left(\frac{1}{t} \int_0^t u_0(y_1 - s) ds \right) dt \end{aligned}$$

Théorème ergodique:

$$\frac{1}{t} \int_0^t u_0(y_1 - s) ds \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[u_0] \quad \text{P.S. et dans } L^2.$$

Donc on écrit

$$u(y_1, y_2; \omega) = \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} G(t, y_2) dt \right)}_{= \mathbb{I}_2} \mathbb{E}[u_0]$$

$$0 \leftarrow \int_{|H| \leq K} (t \partial_t G(t, y_2)) \left(\frac{1}{t} \int_0^t u_0(y_1 - s) ds - \mathbb{E}[u_0] \right) dt$$

(K fixe) $y_2 \rightarrow \infty$

$$0 \leftarrow \int_{|H| \geq K} (t \partial_t G(t, y_2)) \left(\frac{1}{t} \int_0^t u_0(y_1 - s) ds - \mathbb{E}[u_0] \right) dt$$

(unif en y_2) $K \rightarrow \infty$

Bilan: $u(y; \omega) \rightarrow \mathbb{E}[u_0] = (\alpha, 0)$

localement uniformément en y , presque sûrement
et dans $L^p(E)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

De plus (conséquence du théorème d'Egorov)

$$\sup_{R \geq 1} \frac{1}{R^{1/2}} \|u(\frac{\cdot}{\varepsilon}; \omega) - (\alpha, 0)\|_{L^2(\Omega_R)} = o(1)$$

(+ autres estimations analogues), presque sûrement,
quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

En utilisant ce résultat, on parvient à
montrer, avec la même méthode que dans
le cas périodique, que

$$\left(\sup_{R \geq 1} \frac{1}{R} \int_{\Omega_R} |u^\varepsilon - u^N|^2 dx \right)^{1/2} = o(\varepsilon)$$

presque sûrement,

et que

$$\|u^\varepsilon - u^N\|_{L^2_{\text{loc}}(\Omega \times E)} = o(\varepsilon)$$

Pour améliorer le $o(\varepsilon)$, il faut connaître le taux
de décroissance dans le théorème ergodique. Ce
n'est possible que dans certains cas particuliers,
ex: décorrélation à grande distance du profil γ .

PARTIE II: COUCHES D'EKMAN PRÈS DE BORDS RUGUEUX

Pour modéliser le comportement des courants marins sur de grandes échelles spatiales ($10^2 - 10^3$ km), on utilise souvent l'équation de Navier-Stokes-Coriolis:

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \underbrace{\left(\frac{1}{\varepsilon} e_3 \wedge u^\varepsilon \right)}_{\substack{\text{rotation (force de} \\ \text{rapide Coriolis)}}} + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \underbrace{\varepsilon \Delta_{zz} u^\varepsilon}_{\text{viscosité turbulente}} = 0 \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega^\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

où $u^\varepsilon : \mathbb{R}_+ \times \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$

Pour étudier l'effet de la rugosité du fond, on prendra $\Omega^\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \varepsilon \gamma\left(\frac{x_h}{\varepsilon}\right) < x_3 < 1 \right\}$,

où $\gamma \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$. Comme dans la partie précédente, on postule alors un Ansatz du type

$$u^\varepsilon \simeq u^0(t, x_h, z) + u^{BL}\left(t, x_h, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \dots$$

où u^0 vérifie $\begin{cases} e_3 \wedge u^0 + \nabla p^0 = 0 \\ \operatorname{div} u^0 = 0 \end{cases} \leadsto u^0|_{z=0,1} = 0$

$$\rightarrow u^0 = (u_h^0(t, x_h, 0)).$$

et u^{BL} vérifie

$$(E) \begin{cases} -\Delta u^{BL} + ((u^0)^{BL} \cdot \nabla_y) u^{BL} + e_3 \wedge u^{BL} + \nabla_y p^{BL} = 0 \\ \operatorname{div} u^{BL} = 0 \\ u^{BL}|_{\Gamma} = -u^0(t, x_h) \end{cases} \text{ dans } \Omega^{bl}$$

Dans cette partie, on se concentrera uniquement sur le caractère bien posé de (E) dans Ω^{bl} .

Comme pour le système de Stokes, on peut commencer par étudier le cas périodique

$$\Omega^{bl} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}, y_3 > \eta(y_2)\}.$$

En ce cas, en raison d'un phénomène de trou spectral, on peut montrer que les solutions de (E) convergent exponentiellement vite vers zéro en $t \rightarrow \infty$. Ref: Gérard-Varet, '05.

On va s'intéresser directement au cas où Ω^{bl} est non borné dans toutes les directions.

I) Cas linéaire:

Dans cette partie, on étudie le caractère bien posé des systèmes

$$(EL) \begin{cases} -\Delta u + e_3 \wedge u + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega^{bl} \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega^{bl} \\ u|_{\Gamma} = u_0 \end{cases}$$

où $\Omega^{bl} = \{y \in \mathbb{R}^3, y_3 > \eta(y_h)\}$, $\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$,
 $\Gamma = \partial \Omega^{bl} = \{y_3 = \eta(y_h)\}$, $\sup \eta < 0$
 $u_0 \in H_{loc}^s(\mathbb{R}^2)$, avec $s \geq \frac{1}{2}$.

Mêmes difficultés que pour Stokes:

- Domaine non borné dans les 3 directions
 (→ Pas d'inégalité de Poincaré)
- Solutions d'énergie infinie.

On adopte la même stratégie que pour Stokes:
 on découpe $\Omega^{bl} = \mathbb{R}_+^3 \cup \Sigma \cup \Omega^-$:

$$\mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R}^2 \times]0, +\infty[$$

----- $\Sigma: y_3 = 0$

$$\Omega^- = \{y \in \mathbb{R}^3, \eta(y_h) < y_3 < 0\}$$



- Dans \mathbb{R}_+^3 , on résout le système de Stokes-Coriolis avec une donnée au bord dans $H_{\text{uloc}}^{1,q}(\mathbb{R}^3)$, et on définit l'opérateur DN associé.
- Dans Ω^- , on résout le système de Stokes-Coriolis avec condition transparente sur Σ :

$$(\partial_3 u - p e_3)|_{\Sigma} = \text{DN}(u|_{\Sigma}).$$

Puis estimations de Saint Venant dans Ω^- similaires à celles du système de Stokes...

→ On se concentre dans la suite sur le système de Stokes-Coriolis dans \mathbb{R}_+^3 .

Avantage: on peut chercher une formule de représentation en Fourier dans la variable horizontale.

On a:

$$\begin{cases} e_3 \cdot \hat{u} + \left(\frac{i\vec{\zeta}}{\partial_3} \right) \hat{q} - (\partial_3^2 - |\vec{\zeta}|^2) \hat{u} = 0 \\ i\vec{\zeta} \cdot \hat{u}_a + \partial_3 \hat{u}_3 = 0 \\ \hat{u}|_{y_3=0} = \hat{u}_0 \end{cases}$$

$\vec{\zeta} \in \mathbb{R}^2, y_3 > 0$

$$\leadsto \left[(|\vec{\zeta}|^2 - \partial_3^2)^3 - \partial_3^2 \right] \hat{u}_3 = 0$$

On cherche des solutions qui sont des combinaisons linéaires de $\exp(-\lambda(|\vec{\zeta}|) x_3)$ (avec des coefficients dépendant de $\vec{\zeta}$)

→ Équation caractéristique: $\boxed{(|\vec{\zeta}|^2 - \lambda^2)^3 - \lambda^2 = 0}$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$, l'équation caractéristique admet exactement 3 racines distinctes de partie réelle > 0
 Donc si $\hat{u}_0 \in H^{1/q}(\mathbb{R}^q)$, on prend

$$\hat{u}(\xi, y_3) = \sum_{i=1}^3 e^{-\lambda_i(\xi) y_3} \underbrace{M_i(\xi)}_{\in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})} \hat{u}_0(\xi)$$

De nouveau, on va utiliser la théorie d'Hayard-Burg-Zuily et le lemme D.-Gérard-Varet pour comprendre l'action de $\exp(-\lambda_i(D) y_3) M_i(D)$ sur des fonctions $H^S_{\text{uloc}}(\mathbb{R}^q)$.

Nouvelle difficulté: Phénomène de dégénérescence quand $\xi \rightarrow 0$.

Lemme: • Quand $\xi \rightarrow 0$,

$$\lambda_1(\xi) \sim |\xi|^3$$

$$\lambda_2(\xi) \sim e^{i\pi/4}$$

$$\lambda_3(\xi) \sim e^{-i\pi/4}$$

→ source de singularités + pilote le taux de décroissance à l'infini

- Quand $|\xi| \rightarrow +\infty$, $\lambda_i(\xi) \sim |\xi|$ pour $i=1, 2, 3$.
- Développements explicites de $M_i(\xi)$ pour $|\xi| \rightarrow 0$ et $|\xi| \rightarrow +\infty$.

En particulier,

$$M_1(\xi) \simeq \left(\begin{array}{c|c} P_1(\xi) & i \frac{\xi^\perp}{|\xi|} \\ \hline Q_1(\xi) & 1 \end{array} \right)$$

avec P_1 : opérateur homogène de degré 1 (CL de $\frac{\xi_i \xi_i}{|\xi|}$)

Q_1 : polynôme de degré 1 (\rightarrow opérateur de dérivation, local)

On en déduit:

$$\forall \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \exists C > 0, \forall v_0 \in L^1_{\text{loc}}, \forall z \gg 1$$

$$\|P_1(D) \chi(D) e^{-\lambda_1(D)z} v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|v_0\|_{L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)} (Hz)^{-1/3}$$

Quid de la colonne $M_1 e_3$?

Homogène de degré zéro \rightarrow pas de décroissance...

Idée: on suppose que $u_{0,3} = \nabla_h \cdot U_h$

\rightarrow On gagne une puissance de ξ .

Bilan: Théorème [D-Prange ; D-Gérard-Varet]

Soit $u_{0,h} \in H^2_{\text{uloc}}(\mathbb{R}^n)$, $u_{0,3} \in H^1_{\text{uloc}}(\mathbb{R}^n)$ tq $\exists U_h \in H^{1/2}_{\text{uloc}}$
 $u_{0,3} = \nabla_h \cdot U_h$.

Alors $\exists!$ solution de (EL) (dans le cas $\gamma \equiv 0$)

telle que

$$\forall a > 0 \quad \|u\|_{H^1_{\text{uloc}}(\mathbb{R}^n \times (0,a))} < +\infty$$

$$\text{et } \|u(\cdot, z)\|_{L^2_{\text{uloc}}(\mathbb{R}^n)} \leq C (Hz)^{-1/3}$$

$$\|\nabla u(\cdot, z)\|_{L^q_{\text{uloc}}(\mathbb{R}^n)} \leq C (Hz)^{-2/3}$$

On peut alors définir l'opérateur DN associé (en calculant explicitement son symbole), et on montre que

$$\text{DN}: H^{1/2}(\mathbb{R}^2) \rightarrow H^{-1/2}(\mathbb{R}^2).$$

II) Cas non linéaire:

1) Première étape:

Étude du système

$$\begin{cases} -\Delta u + (u \cdot \nabla)u + e_3 \cdot \nabla u + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega^{\text{sl}} \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega^{\text{sl}} \\ u|_{\Gamma} = u_0 \end{cases}$$

On se sert de l'étude linéaire en traitant le terme $u \cdot \nabla u$ perturbativement, et en considérant l'équation comme un problème d'évolution en z .

→ Formule de Duhamel, théorème de point fixe.

NB: La décroissance $\|u(z)\|_{L^q_{\text{uloc}}} \lesssim z^{-1/3}$

et la décroissance critique pour faire tourner le théorème de point fixe.

→ Même résultat que dans le cas linéaire pour des données petites.

2) Deuxième étape: retour au système (E)

Même stratégie que ci-dessus:

- On linéarise (E) autour de zéro
→ propriétés de décroissance à l'infini
- Point fixe pour le système non linéaire.

Difficulté: anisotropie à cause du terme $u \cdot \nabla_y u$ (terme d'Oseen): ajoute une partie imaginaire à λ_1 à l'ordre principal (sans modifier la partie réelle). On ne peut pas mener une étude aussi générale que pour (EL), mais les résultats s'étendent bien si on travaille soit dans les espaces FH (images par Fourier de mesures de Radon) soit dans des espaces de fonction quasi-périodiques:

$$d_1, d_2 \in \mathbb{N}, \mu_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, \mu_2 \in \mathbb{R}^{d_2}, \mu = (\mu_1, \mu_2), d = d_1 + d_2$$

$$H_{\lambda, \mu}^s = \left\{ f \in H_{loc}^s(\mathbb{R}^2), \exists F \in H^s(\mathbb{T}^d), f(y_1, y_2) = F(y_1, \mu_1, y_2, \mu_2) \right\}_{PP.}$$

Théorème : [D; Gérard - Varet - Maekawa;
en préparation]

$\exists U_\infty < \infty$ tq si $\|u\|, \|U_0\|_{H_{d,\mu}^s} \leq U_\infty$, alors

(E) admet une unique solution.