Homogénéisation de lois de conservation scalaires

Anne-Laure Dalibard

CEREMADE
Université Paris-Dauphine

29 Novembre 2007
Séminaire EDP
Université Paris-Sud

Plan

Plan

Position du problème

- **Objet de l'étude :** comportement lorsque $\varepsilon \to 0$ de $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x)$ $(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N)$ sol. de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_i\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t,x)\right) - \varepsilon \Delta_x u^\varepsilon = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{1}$$

- **Modèle :** $u^\varepsilon =$ densité de particules dans un milieu fortement oscillant.
- ε = taille typique des hétérogénéités dans le milieu.
- **Hypothèse de périodicité :** $A_i = A_i(y,v)$ (resp. $u_0 = u_0(x,y)$) est $[0,1]^N$-périodique en y ($Y = [0,1]^N$).
- **Viscosité d'ordre** $\varepsilon \to$ action à un niveau microscopique uniquement.

Position du problème

- **Objet de l'étude :** comportement lorsque $\varepsilon \to 0$ de $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x)$ $(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N)$ sol. de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_i\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t,x)\right) - \varepsilon \Delta_x u^\varepsilon = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{1}$$

- **Modèle :** $u^\varepsilon =$ densité de particules dans un milieu fortement oscillant.
- ε = taille typique des hétérogénéités dans le milieu.
- **Hypothèse de périodicité :** $A_i = A_i(y,v)$ (resp. $u_0 = u_0(x,y)$) est $[0,1]^N$-périodique en y ($Y = [0,1]^N$).
- **Viscosité d'ordre** $\varepsilon \to$ action à un niveau microscopique uniquement.

Position du problème

- **Objet de l'étude :** comportement lorsque $\varepsilon \to 0$ de $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x)$ $(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N)$ sol. de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_i\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t,x)\right) - \varepsilon \Delta_x u^\varepsilon = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{1}$$

- **Modèle :** $u^\varepsilon =$ densité de particules dans un milieu fortement oscillant.
- ε = taille typique des hétérogénéités dans le milieu.
- **Hypothèse de périodicité :** $A_i = A_i(y,v)$ (resp. $u_0 = u_0(x,y)$) est $[0,1]^N$-périodique en y ($Y = [0,1]^N$).
- **Viscosité d'ordre** ε $\to$ action à un niveau microscopique uniquement.

Objectifs et outils

- **But :** montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t,x) \longrightarrow \bar{u}(t,x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et identifier $\bar{u}$ (au moyen d'un problème homogénéisé si possible).

- **Deux sous-problèmes :**
  1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
  2. Démontrer la convergence.
- **Difficulté :** pas de borne *a priori* simple !
- **Clé de l'étude :** existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1

$\longrightarrow$ Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)

Objectifs et outils

- **But :** montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t,x) \to \bar{u}(t,x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et identifier $\bar{u}$ (au moyen d'un problème homogénéisé si possible).

- **Deux sous-problèmes :**
  1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
  2. Démontrer la convergence.
- **Difficulté :** pas de borne *a priori* simple !
- **Clé de l'étude :** existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1

$\to$ Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)

Objectifs et outils

- **But :** montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t,x) \to \bar{u}(t,x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et identifier $\bar{u}$ (au moyen d'un problème homogénéisé si possible).

- **Deux sous-problèmes :**
  1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
  2. Démontrer la convergence.
- **Difficulté :** pas de borne *a priori* simple !
- **Clé de l'étude :** existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1

$\rightarrow$ Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)

Objectifs et outils

- **But :** montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t,x) \to \bar{u}(t,x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et identifier $\bar{u}$ (au moyen d'un problème homogénéisé si possible).

- **Deux sous-problèmes :**
  1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
  2. Démontrer la convergence.
- **Difficulté :** pas de borne *a priori* simple !
- **Clé de l'étude :** existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1

$\to$ Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)

Objectifs et outils

- **But :** montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t,x) \to \bar{u}(t,x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et identifier $\bar{u}$ (au moyen d'un problème homogénéisé si possible).

- **Deux sous-problèmes :**
  1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
  2. Démontrer la convergence.
- **Difficulté :** pas de borne *a priori* simple !
- **Clé de l'étude :** existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1

$\to$ Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)

Objectifs et outils

- **But :** montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t,x) \to \bar{u}(t,x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et identifier $\bar{u}$ (au moyen d'un problème homogénéisé si possible).
- **Deux sous-problèmes :**
  1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
  2. Démontrer la convergence.
- **Difficulté :** pas de borne *a priori* simple !
- **Clé de l'étude :** existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1

$\to$ Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)

Plan

Plan

Développement asymptotique formel

Développement limité en puissances de ε :

$$u^\varepsilon(t,x) \approx u^0\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots \tag{2}$$

où chaque terme $u^i(t,x,y)$ est périodique en y.

Développement asymptotique formel

Développement limité en puissances de ε :

$$u^\varepsilon(t,x) \approx u^0\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots \tag{2}$$

où chaque terme $u^i(t,x,y)$ est périodique en y. On trouve :

Ordre ε^{-1} : Problème de la cellule :

$$-\Delta_y u^0 + \mathrm{div}_y A(y,u^0) = 0, \quad y \in Y. \tag{3}$$

$\rightarrow$ On écrit $u^0(t,x,y)$ sous la forme

$$u^0(t,x,y) = v(y,\bar{u}(t,x))$$

où $\bar{u}(t,x) = \langle u^0(t,x,\cdot)\rangle_Y$ et

$$\begin{cases} -\Delta_y v(y,p) + \mathrm{div}_y A(y,v(y,p)) = 0, \\ \langle v(\cdot,p)\rangle_Y = p \quad \forall p \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

Développement asymptotique formel

Développement limité en puissances de ε :

$$u^{\varepsilon}(t,x) \approx u^0\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots \tag{2}$$

où chaque terme $u^i(t,x,y)$ est périodique en y. On trouve :
Ordre ε^{-1} : Problème de la cellule :

$$-\Delta_y u^0 + \mathrm{div}_y A(y,u^0) = 0, \quad y \in Y. \tag{3}$$

$\rightarrow$ On écrit $u^0(t,x,y)$ sous la forme

$$u^0(t,x,y) = v(y,\bar{u}(t,x))$$

où $\bar{u}(t,x) = \left\langle u^0(t,x,\cdot)\right\rangle_Y$ et

$$\begin{cases} -\Delta_y v(y,p) + \mathrm{div}_y A(y,v(y,p)) = 0, \\ \langle v(\cdot,p)\rangle_Y = p \quad \forall p \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

Développement asymptotique formel

Problème homogénéisé

Ordre ε^0 : en posant $a(y,v) = \partial_v A(y,v)$, on a

$$\partial_t u^0 + \mathrm{div}_x A(y,u^0) = \Delta_y u^1 - \mathrm{div}_y(a(y,u^0)u^1) + 2\Delta_{xy}u^0.$$

Après intégration sur Y, on obtient

$$\partial_t \bar{u}(t,x) + \mathrm{div}_x \overline{A}(\bar{u}(t,x)) = 0, \tag{5}$$

où

$$\overline{A}(p) = \int_{[0,1]^N} A(y, v(y,p))\, dy.$$

$\rightarrow$ Problème homogénéisé !

Développement asymptotique formel

Problème homogénéisé

Ordre ε^0 : en posant $a(y,v) = \partial_v A(y,v)$, on a

$$\partial_t u^0 + \mathrm{div}_x A(y,u^0) = \Delta_y u^1 - \mathrm{div}_y(a(y,u^0)u^1) + 2\Delta_{xy} u^0.$$

Après intégration sur Y, on obtient

$$\partial_t \bar{u}(t,x) + \mathrm{div}_x \overline{A}(\bar{u}(t,x)) = 0, \tag{5}$$

où

$$\overline{A}(p) = \int_{[0,1]^N} A(y, v(y,p))\, dy.$$

$\rightarrow$ Problème homogénéisé !

Développement asymptotique formel

Problème homogénéisé

Ordre ε^0 : en posant $a(y,v) = \partial_v A(y,v)$, on a

$$\partial_t u^0 + \mathrm{div}_x A(y,u^0) = \Delta_y u^1 - \mathrm{div}_y(a(y,u^0)u^1) + 2\Delta_{xy}u^0.$$

Après intégration sur Y, on obtient

$$\partial_t \bar{u}(t,x) + \mathrm{div}_x \overline{A}(\bar{u}(t,x)) = 0, \tag{5}$$

où

$$\overline{A}(p) = \int_{[0,1]^N} A(y, v(y,p))\, dy.$$

$\rightarrow$ Problème homogénéisé !

Développement asymptotique formel

Oscillations temporelles rapides

- **Problème :** que se passe-t-il si

$$u_0(x,y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))?$$

$\rightarrow$ donnée mal préparée.

- **Solution :** on introduit des échelles de temps microscopiques :

$$u^\varepsilon(t,x) \approx u^0\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots \qquad (6)$$

Le problème microscopique devient

$$\partial_\tau u^0 + \mathrm{div}_y A(y, u^0) - \Delta_y u^0 = 0. \qquad (7)$$

- Sol. du pb. de la cellule = sol. stationnaire de (7).

Développement asymptotique formel

Oscillations temporelles rapides

- **Problème :** que se passe-t-il si

$$u_0(x,y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))?$$

$\longrightarrow$ donnée mal préparée.

- **Solution :** on introduit des échelles de temps microscopiques :

$$u^\varepsilon(t,x) \approx u^0\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots \tag{6}$$

Le problème microscopique devient

$$\partial_\tau u^0 + \mathrm{div}_y A(y, u^0) - \Delta_y u^0 = 0. \tag{7}$$

- Sol. du pb. de la cellule = sol. stationnaire de (7).

Développement asymptotique formel

Oscillations temporelles rapides

- **Problème :** que se passe-t-il si

$$u_0(x,y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))?$$

$\longrightarrow$ donnée mal préparée.

- **Solution :** on introduit des échelles de temps microscopiques :

$$u^\varepsilon(t,x) \approx u^0\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots \tag{6}$$

Le problème microscopique devient

$$\partial_\tau u^0 + \mathrm{div}_y A(y, u^0) - \Delta_y u^0 = 0. \tag{7}$$

- Sol. du pb. de la cellule = sol. stationnaire de (7).

Plan

Existence et unicité des sol. du pb. de la cellule

Hypothèses : $\exists n, m, C_0 > 0$, $n < \frac{N+2}{N-2}$ si $N > 2$, t.q. $\forall (y, v)$

$$\begin{aligned} |\partial_v A_i(y, v)| &\leq C_0 (1 + |v|)^m, \\ |\mathrm{div}_y A(y, v)| &\leq C_0 (1 + |v|)^n, \end{aligned} \tag{8}$$

et $m = 0$, ou bien $n < 1$, ou bien

$$\left[n < \min\left(\frac{N+2}{N}, 2 \right) \text{ et } \exists p_0 \in \mathbb{R},\ \mathrm{div}_y A(y, p_0) \equiv 0. \right] \tag{9}$$

Proposition : Sous (8), (9), pour tout $p \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution $v(y, p) \in H^1_{\text{per}}(Y)$ du pb. de la cellule :

$$-\Delta_y v(y, p) + \mathrm{div}_y A(y, v(y, p)) = 0, \quad \langle v(\cdot, p) \rangle = p.$$

Croissance en p :

$$v(y, p) \geq v(y, p') \quad \forall p \geq p' \ \forall y \in Y.$$

Outil de la preuve : régularité elliptique.

Existence et unicité des sol. du pb. de la cellule

Hypothèses : $\exists n, m, C_0 > 0$, $n < \frac{N+2}{N-2}$ si $N > 2$, t.q. $\forall (y, v)$

$$\begin{aligned} |\partial_v A_i(y,v)| &\leq C_0(1+|v|)^m, \\ |\mathrm{div}_y A(y,v)| &\leq C_0(1+|v|)^n, \end{aligned} \tag{8}$$

et $m = 0$, ou bien $n < 1$, ou bien

$$\left[n < \min\left(\frac{N+2}{N}, 2\right) \text{ et } \exists p_0 \in \mathbb{R},\ \mathrm{div}_y A(y, p_0) \equiv 0. \right] \tag{9}$$

Proposition : Sous (8), (9), pour tout $p \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution $v(y,p) \in H^1_{\mathrm{per}}(Y)$ du pb. de la cellule :

$$-\Delta_y v(y,p) + \mathrm{div}_y A(y, v(y,p)) = 0, \quad \langle v(\cdot, p) \rangle = p.$$

Croissance en p :

$$v(y,p) \geq v(y,p') \quad \forall p \geq p' \ \forall y \in Y.$$

Outil de la preuve : régularité elliptique.

Existence et unicité des sol. du pb. de la cellule

Hypothèses : $\exists n, m, C_0 > 0$, $n < \frac{N+2}{N-2}$ si $N > 2$, t.q. $\forall (y, v)$

$$\begin{aligned} |\partial_v A_i(y,v)| &\le C_0(1+|v|)^m, \\ |\mathrm{div}_y A(y,v)| &\le C_0(1+|v|)^n, \end{aligned} \tag{8}$$

et $m = 0$, ou bien $n < 1$, ou bien

$$\left[n < \min\left(\frac{N+2}{N}, 2\right) \text{ et } \exists p_0 \in \mathbb{R},\ \mathrm{div}_y A(y, p_0) \equiv 0. \right] \tag{9}$$

Proposition : Sous (8), (9), pour tout $p \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution $v(y,p) \in H^1_{\mathrm{per}}(Y)$ du pb. de la cellule :

$$-\Delta_y v(y,p) + \mathrm{div}_y A(y, v(y,p)) = 0, \quad \langle v(\cdot, p) \rangle = p.$$

Croissance en p :

$$v(y,p) \ge v(y,p') \quad \forall p \ge p'\ \forall y \in Y.$$

Outil de la preuve : régularité elliptique.

Existence et unicité des sol. du pb. de la cellule

Hypothèses : $\exists n, m, C_0 > 0$, $n < \frac{N+2}{N-2}$ si $N > 2$, t.q. $\forall (y, v)$

$$\begin{aligned} |\partial_v A_i(y,v)| &\le C_0(1+|v|)^m, \\ |\mathrm{div}_y A(y,v)| &\le C_0(1+|v|)^n, \end{aligned} \tag{8}$$

et $m = 0$, ou bien $n < 1$, ou bien

$$\left[n < \min\left(\frac{N+2}{N}, 2\right) \text{ et } \exists p_0 \in \mathbb{R},\ \mathrm{div}_y A(y, p_0) \equiv 0. \right] \tag{9}$$

Proposition : Sous (8), (9), pour tout $p \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution $v(y,p) \in H^1_{\mathrm{per}}(Y)$ du pb. de la cellule :

$$-\Delta_y v(y,p) + \mathrm{div}_y A(y, v(y,p)) = 0, \quad \langle v(\cdot, p) \rangle = p.$$

Croissance en p :

$$v(y,p) \ge v(y,p') \quad \forall p \ge p' \ \forall y \in Y.$$

Outil de la preuve : régularité elliptique.

Est. *a priori* pour $-\Delta_y v(y,p) + \mathrm{div}_y A(y, v(y,p)) = 0$

- $m = 0$ **(A Lipschitz)** : linéarisation du problème de la cellule.
  Sinon : en multipliant l'équation par v, on obtient :
  $$\int_Y |\nabla v|^2 = \int_Y \nabla v \cdot A(y,v)$$
  D'après (8), on a, pour tout $|p| \leq R$
  $$||v||_{H^1} \leq C_R \left(1 + ||v||_{L^1}^{\frac{1}{2}} + ||v||_{L^{n+1}}^{\frac{n+1}{2}}\right).$$
- $n < 1$ **(cas sous-linéaire)** : OK.
- $1 \leq n < \frac{N+2}{N}$ **ET sol. particulière** $v(\cdot, p_0) = p_0$:
  a. Borne L^1 sur v par comparaison avec $v(y, p_0)$;
  b. Interpolation de L^{n+1} entre L^1 et $L^{\frac{2N}{N-2}}$ (si $N > 2$).

Est. *a priori* pour $-\Delta_y v(y,p) + \mathrm{div}_y A(y, v(y,p)) = 0$

- $m = 0$ **(A Lipschitz)** : linéarisation du problème de la cellule.
  Sinon : en multipliant l'équation par v, on obtient :

  $$\int_Y |\nabla v|^2 = \int_Y \nabla v \cdot A(y,v)$$

  D'après (8), on a, pour tout $|p| \leq R$

  $$||v||_{H^1} \leq C_R \left(1 + ||v||_{L^1}^{\frac{1}{2}} + ||v||_{L^{n+1}}^{\frac{n+1}{2}}\right).$$

- $n < 1$ **(cas sous-linéaire)** : OK.
- $1 \leq n < \frac{N+2}{N}$ **ET sol. particulière** $v(\cdot, p_0) = p_0$:
  a. Borne L^1 sur v par comparaison avec $v(y, p_0)$;
  b. Interpolation de L^{n+1} entre L^1 et $L^{\frac{2N}{N-2}}$ (si $N > 2$).

Est. *a priori* pour $-\Delta_y v(y,p) + \mathrm{div}_y A(y, v(y,p)) = 0$

- $m = 0$ **(A Lipschitz)** : linéarisation du problème de la cellule.
  Sinon : en multipliant l'équation par v, on obtient :

  $$\int_Y |\nabla v|^2 = \int_Y \nabla v \cdot A(y,v)$$

  D'après (8), on a, pour tout $|p| \leq R$

  $$||v||_{H^1} \leq C_R \left(1 + ||v||_{L^1}^{\frac{1}{2}} + ||v||_{L^{n+1}}^{\frac{n+1}{2}} \right).$$

- $n < 1$ **(cas sous-linéaire)** : OK.
- $1 \leq n < \frac{N+2}{N}$ **ET sol. particulière** $v(\cdot, p_0) = p_0$:
  a. Borne L^1 sur v par comparaison avec $v(y, p_0)$;
  b. Interpolation de L^{n+1} entre L^1 et $L^{\frac{2N}{N-2}}$ (si $N > 2$).

Est. *a priori* pour $-\Delta_y v(y,p) + \mathrm{div}_y A(y, v(y,p)) = 0$

- $m = 0$ **(A Lipschitz)** : linéarisation du problème de la cellule.
  Sinon : en multipliant l'équation par v, on obtient :
  $$\int_Y |\nabla v|^2 = \int_Y \nabla v \cdot A(y,v)$$
  D'après (8), on a, pour tout $|p| \leq R$
  $$||v||_{H^1} \leq C_R \left(1 + ||v||_{L^1}^{\frac{1}{2}} + ||v||_{L^{n+1}}^{\frac{n+1}{2}}\right).$$
- $n < 1$ **(cas sous-linéaire)** : OK.
- $1 \leq n < \frac{N+2}{N}$ **ET sol. particulière** $v(\cdot, p_0) = p_0$:
  a. Borne L^1 sur v par comparaison avec $v(y, p_0)$;
  b. Interpolation de L^{n+1} entre L^1 et $L^{\frac{2N}{N-2}}$ (si $N > 2$).

Est. *a priori* pour $-\Delta_y v(y,p) + \mathrm{div}_y A(y, v(y,p)) = 0$

- $m = 0$ **(A Lipschitz)** : linéarisation du problème de la cellule.
  Sinon : en multipliant l'équation par v, on obtient :

  $$\int_Y |\nabla v|^2 = \int_Y \nabla v \cdot A(y,v)$$

  D'après (8), on a, pour tout $|p| \leq R$

  $$||v||_{H^1} \leq C_R \left(1 + ||v||_{L^1}^{\frac{1}{2}} + ||v||_{L^{n+1}}^{\frac{n+1}{2}} \right).$$

- $n < 1$ **(cas sous-linéaire)** : OK.
- $1 \leq n < \frac{N+2}{N}$ **ET sol. particulière** $v(\cdot, p_0) = p_0$:
  a. Borne L^1 sur v par comparaison avec $v(y, p_0)$;
  b. Interpolation de L^{n+1} entre L^1 et $L^{\frac{2N}{N-2}}$ (si $N > 2$).

Plan

Couche initiale

- **Proposition :** On suppose (8), (9), $\partial_v \partial_{y_j} A_i \in L^\infty_{\text{loc}}(Y \times \mathbb{R})$, et $\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$,

$$v(y, \beta_1) \leq u_0(y) \leq v(y, \beta_2) \quad \forall y \in Y. \tag{10}$$

Soit $w = w(\tau, y)$ la sol. du pb. de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_\tau w + \operatorname{div}_y A(y, w) - \Delta_y w = 0, \\ w(\tau = 0, y) = u_0(y). \end{cases}$$

Alors $\exists c, \mu = \mu(N, ||\partial_v A||_{L^\infty_{\text{loc}}}) > 0$ t.q.

$$||w(\tau, y) - v(y, p)||_{L^\infty(Y)} \leq c e^{-\mu\tau},$$

où $p = \langle u_0 \rangle$.

- **Bilan :** C.I. mal-préparée : $u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))$

$$\Rightarrow \text{Couche initiale.}$$

Couche initiale

- **Proposition :** On suppose (8), (9), $\partial_v \partial_{y_j} A_i \in L^\infty_{\text{loc}}(Y \times \mathbb{R})$, et $\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$,

$$v(y, \beta_1) \leq u_0(y) \leq v(y, \beta_2) \quad \forall y \in Y. \tag{10}$$

Soit $w = w(\tau, y)$ la sol. du pb. de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_\tau w + \mathrm{div}_y A(y, w) - \Delta_y w = 0, \\ w(\tau = 0, y) = u_0(y). \end{cases}$$

Alors $\exists c, \mu = \mu(N, ||\partial_v A||_{L^\infty_{\text{loc}}}) > 0$ t.q.

$$||w(\tau, y) - v(y, p)||_{L^\infty(Y)} \leq c e^{-\mu\tau},$$

où $p = \langle u_0 \rangle$.

- **Bilan :** C.I. mal-préparée : $u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))$

$\Rightarrow$ Couche initiale.

Couche initiale

- **Proposition :** On suppose (8), (9), $\partial_v \partial_{y_j} A_i \in L^\infty_{\text{loc}}(Y \times \mathbb{R})$, et $\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$,

$$v(y, \beta_1) \leq u_0(y) \leq v(y, \beta_2) \quad \forall y \in Y. \tag{10}$$

Soit $w = w(\tau, y)$ la sol. du pb. de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_\tau w + \mathrm{div}_y A(y, w) - \Delta_y w = 0, \\ w(\tau = 0, y) = u_0(y). \end{cases}$$

Alors $\exists c, \mu = \mu(N, ||\partial_v A||_{L^\infty_{\text{loc}}}) > 0$ t.q.

$$||w(\tau, y) - v(y, p)||_{L^\infty(Y)} \leq c e^{-\mu\tau},$$

où $p = \langle u_0 \rangle$.

- **Bilan :** C.I. mal-préparée : $u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))$

$\Rightarrow$ Couche initiale.

Autour de l'hypothèse $v(\cdot, \beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot, \beta_2)$

- **Rappel :** $v(y, p)$ croissant en p, $\langle v(\cdot, p)\rangle = p$.
- **Un cas simple :** si

$$\lim_{p\to\infty} \inf_{y\in Y} v(y, p) = +\infty \qquad (11)$$

alors

$$(\exists C > 0,\ u_0 \leq C \text{ p.p. }) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R},\ u_0 \leq v(\cdot, \beta_2) \text{ p.p. })$$

- Condition suffisante pour (11) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- En général (si $m \neq 0$), (11) n'est pas vérifiée...
- Comportement dans le cas général ?

Autour de l'hypothèse $v(\cdot, \beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot, \beta_2)$

- **Rappel :** $v(y, p)$ croissant en p, $\langle v(\cdot, p) \rangle = p$.
- **Un cas simple :** si

$$\lim_{p \to \infty} \inf_{y \in Y} v(y, p) = +\infty \qquad (11)$$

alors

$$(\exists C > 0,\ u_0 \leq C \text{ p.p. }) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R},\ u_0 \leq v(\cdot, \beta_2) \text{ p.p. })$$

- Condition suffisante pour (11) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- En général (si $m \neq 0$), (11) n'est pas vérifiée...
- Comportement dans le cas général ?

Autour de l'hypothèse $v(\cdot,\beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot,\beta_2)$

- **Rappel :** $v(y,p)$ croissant en p, $\langle v(\cdot,p)\rangle = p$.
- **Un cas simple :** si

$$\lim_{p\to\infty} \inf_{y\in Y} v(y,p) = +\infty \qquad (11)$$

alors

$$(\exists C > 0,\ u_0 \leq C \text{ p.p. }) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R},\ u_0 \leq v(\cdot,\beta_2) \text{ p.p. })$$

- Condition suffisante pour (11) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- En général (si $m \neq 0$), (11) n'est pas vérifiée...
- Comportement dans le cas général ?

Autour de l'hypothèse $v(\cdot, \beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot, \beta_2)$

- **Rappel :** $v(y, p)$ croissant en p, $\langle v(\cdot, p) \rangle = p$.
- **Un cas simple :** si

$$\lim_{p \to \infty} \inf_{y \in Y} v(y, p) = +\infty \qquad (11)$$

alors

$$(\exists C > 0,\ u_0 \leq C \text{ p.p. }) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R},\ u_0 \leq v(\cdot, \beta_2) \text{ p.p. })$$

- Condition suffisante pour (11) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- En général (si $m \neq 0$), (11) n'est pas vérifiée...
- Comportement dans le cas général ?

Autour de l'hypothèse $v(\cdot,\beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot,\beta_2)$

- **Rappel :** $v(y,p)$ croissant en p, $\langle v(\cdot,p)\rangle = p$.
- **Un cas simple :** si

$$\lim_{p\to\infty} \inf_{y\in Y} v(y,p) = +\infty \tag{11}$$

alors

$$(\exists C > 0,\ u_0 \leq C \text{ p.p. }) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R},\ u_0 \leq v(\cdot,\beta_2) \text{ p.p. })$$

- Condition suffisante pour (11) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- En général (si $m \neq 0$), (11) n'est pas vérifiée...
- Comportement dans le cas général ?

Autour de l'hypothèse $v(\cdot,\beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot,\beta_2)$

- **Rappel :** $v(y,p)$ croissant en p, $\langle v(\cdot,p)\rangle = p$.
- **Un cas simple :** si

$$\lim_{p\to\infty} \inf_{y\in Y} v(y,p) = +\infty \tag{11}$$

alors

$$(\exists C > 0,\ u_0 \leq C \text{ p.p. }) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R},\ u_0 \leq v(\cdot,\beta_2) \text{ p.p. })$$

- Condition suffisante pour (11) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- En général (si $m \neq 0$), (11) n'est pas vérifiée...
- Comportement dans le cas général ?

Résumé

- **Donnée initiale bien préparée :** si

$$u^\varepsilon(t=0,x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}_0(x)\right),$$

alors on s'attend à avoir

$$u^\varepsilon(t,x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t,x)\right)$$

où :

  - $v(y,p)$ sol. d'une éq. de la cellule (microscopique)
  - $\bar{u}(t,x)$ sol. d'une L.C.S. (macroscopique).

- **Donnée initiale mal préparée :** si

$$v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_1\right) \leq u^\varepsilon(t=0,x) \leq v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_2\right):$$

$\longrightarrow$ Couche initiale (de taille typique ε) pendant laquelle u^ε s'adapte au profil ci-dessus.

Résumé

- **Donnée initiale bien préparée :** si

$$u^\varepsilon(t=0,x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}_0(x)\right),$$

alors on s'attend à avoir

$$u^\varepsilon(t,x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t,x)\right)$$

où :

  - $v(y,p)$ sol. d'une éq. de la cellule (microscopique)
  - $\bar{u}(t,x)$ sol. d'une L.C.S. (macroscopique).

- **Donnée initiale mal préparée :** si

$$v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_1\right) \leq u^\varepsilon(t=0,x) \leq v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_2\right) :$$

$\longrightarrow$ Couche initiale (de taille typique ε) pendant laquelle u^ε s'adapte au profil ci-dessus.

Résumé

- **Donnée initiale bien préparée :** si

$$u^\varepsilon(t=0,x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}_0(x)\right),$$

alors on s'attend à avoir

$$u^\varepsilon(t,x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t,x)\right)$$

où :

  - $v(y,p)$ sol. d'une éq. de la cellule (microscopique)
  - $\bar{u}(t,x)$ sol. d'une L.C.S. (macroscopique).

- **Donnée initiale mal préparée :** si

$$v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_1\right) \leq u^\varepsilon(t=0,x) \leq v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_2\right):$$

$\longrightarrow$ Couche initiale (de taille typique ε) pendant laquelle u^ε s'adapte au profil ci-dessus.

Résumé

- **Donnée initiale bien préparée :** si

$$u^\varepsilon(t=0,x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}_0(x)\right),$$

alors on s'attend à avoir

$$u^\varepsilon(t,x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t,x)\right)$$

où :

  - $v(y,p)$ sol. d'une éq. de la cellule (microscopique)
  - $\bar{u}(t,x)$ sol. d'une L.C.S. (macroscopique).

- **Donnée initiale mal préparée :** si

$$v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_1\right) \leq u^\varepsilon(t=0,x) \leq v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_2\right) :$$

$\longrightarrow$ Couche initiale (de taille typique ε) pendant laquelle u^ε s'adapte au profil ci-dessus.

Plan

Plan

Résultat d'homogénéisation

Théorème : On suppose (8), (9), $\partial_v \partial_{y_j} A_i \in L^\infty_{\text{loc}}$, $\partial^2_v A_i(y,\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ p.p. $y \in Y$, et

$$\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad v(y,\beta_1) \leq u_0(x,y) \leq v(y,\beta_2) \quad \text{p.p.}$$

Alors

$$u^\varepsilon(t,x) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t,x)\right) \to 0 \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}([0,\infty) \times \mathbb{R}^N).$$

Publications :

- Journal de mathématiques pures et appliquées, 2006 ;
- SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2007 ;
- Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2007.

Résultat d'homogénéisation

Théorème : On suppose (8), (9), $\partial_v \partial_{y_j} A_i \in L^\infty_{\mathrm{loc}}$, $\partial_v^2 A_i(y,\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ p.p. $y \in Y$, et

$$\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad v(y,\beta_1) \le u_0(x,y) \le v(y,\beta_2) \quad \text{p.p.}$$

Alors

$$u^\varepsilon(t,x) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t,x)\right) \to 0 \quad \text{dans } L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty) \times \mathbb{R}^N).$$

Publications :

- Journal de mathématiques pures et appliquées, 2006 ;
- SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2007 ;
- Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2007.

Plan

Formulation cinétique

- **Idée :** comparaison avec les sol. stat. : $(v(y,p))_{p\in\mathbb{R}}$.
- **Résultat :** $f^\varepsilon(t,x,p) := \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v(\frac{x}{\varepsilon},p)} \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{x}{\varepsilon},p\right)$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}f^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, v(\frac{x}{\varepsilon},p)\right) f^\varepsilon\right] - \varepsilon\Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}. \tag{12}$$

- $m^\varepsilon(t,x,p) \geq 0$: mesure du défaut d'entropie.
  Localement bornée, uniformément en ε (pour des données bien préparées).
- **Intérêt :** linéarité (passage à la limite faible).

Formulation cinétique

- **Idée :** comparaison avec les sol. stat. : $(v(y,p))_{p\in\mathbb{R}}$.
- **Résultat :** $f^\varepsilon(t,x,p) := \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v(\frac{x}{\varepsilon},p)} \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{x}{\varepsilon},p\right)$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}f^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, v(\frac{x}{\varepsilon},p)\right)f^\varepsilon\right] - \varepsilon\Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}. \qquad (12)$$

- $m^\varepsilon(t,x,p) \geq 0$: mesure du défaut d'entropie.
  Localement bornée, uniformément en ε (pour des données bien préparées).
- **Intérêt :** linéarité (passage à la limite faible).

Formulation cinétique

- **Idée :** comparaison avec les sol. stat. : $(v(y,p))_{p\in\mathbb{R}}$.
- **Résultat :** $f^\varepsilon(t,x,p) := \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v(\frac{x}{\varepsilon},p)} \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{x}{\varepsilon},p\right)$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} f^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, v(\frac{x}{\varepsilon},p\right) f^\varepsilon\right] - \varepsilon\Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}. \qquad (12)$$

- $m^\varepsilon(t,x,p) \geq 0$: mesure du défaut d'entropie.
  Localement bornée, uniformément en ε (pour des données bien préparées).
- **Intérêt :** linéarité (passage à la limite faible).

Formulation cinétique

- **Idée :** comparaison avec les sol. stat. : $(v(y,p))_{p\in\mathbb{R}}$.
- **Résultat :** $f^\varepsilon(t,x,p) := \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v(\frac{x}{\varepsilon},p)} \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{x}{\varepsilon},p\right)$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} f^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, v(\frac{x}{\varepsilon},p\right) f^\varepsilon\right] - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}. \qquad (12)$$

- $m^\varepsilon(t,x,p) \geq 0$: mesure du défaut d'entropie. Localement bornée, uniformément en ε (pour des données bien préparées).
- **Intérêt :** linéarité (passage à la limite faible).

Réduction du problème

- **Convergence à deux-échelles :**

$$\mathbf{1}_{u^\varepsilon > v(\frac{x}{\varepsilon}, p)} \overset{2\text{ - éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p),$$

$$f^\varepsilon(t,x,p) = \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v(\frac{x}{\varepsilon}, p)} \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \overset{2\text{ - éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p)\frac{\partial v}{\partial p}.$$

- **But :** montrer que $g(t,x,y,p) = \mathbf{1}_{p<\bar{u}(t,x)}$.

  En effet : si

$$\mathbf{1}_{v(\frac{x}{\varepsilon}, p) < u^\varepsilon(t,x)} \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} \mathbf{1}_{p<\bar{u}(t,x)} = \mathbf{1}_{v(y,p)<v(y,\bar{u}(t,x))}.$$

  alors

$$u^\varepsilon(t,x) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t,x)\right) \to 0$$

  dans L^1_{loc} lorsque $\varepsilon \to 0$.
  (Fonction test $\psi(t,x,y,p) = \varphi(t,x)\frac{\partial v}{\partial p}(y,p)\mathbf{1}_{\bar{u}(t,x)<p<p_0}$).

- **Formulation équivalente :**

  mesure d'Young = masse de Dirac.

Réduction du problème

- **Convergence à deux-échelles :**

$$\mathbf{1}_{u^\varepsilon > v(\frac{x}{\varepsilon},p)} \overset{2\text{ - éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p),$$

$$f^\varepsilon(t,x,p) = \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v(\frac{x}{\varepsilon},p)} \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{x}{\varepsilon},p\right) \overset{2\text{ - éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p)\frac{\partial v}{\partial p}.$$

- **But :** montrer que $g(t,x,y,p) = \mathbf{1}_{p<\bar{u}(t,x)}$.
  En effet : si

$$\mathbf{1}_{v(\frac{x}{\varepsilon},p)<u^\varepsilon(t,x)} \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} \mathbf{1}_{p<\bar{u}(t,x)} = \mathbf{1}_{v(y,p)<v(y,\bar{u}(t,x))}.$$

  alors

$$u^\varepsilon(t,x) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t,x)\right) \to 0$$

  dans L^1_{loc} lorsque $\varepsilon \to 0$.
  (Fonction test $\psi(t,x,y,p) = \varphi(t,x)\frac{\partial v}{\partial p}(y,p)\mathbf{1}_{\bar{u}(t,x)<p<p_0}$).

- **Formulation équivalente :**

$$\text{mesure d'Young} = \text{masse de Dirac.}$$

Réduction du problème

- **Convergence à deux-échelles :**

$$\mathbf{1}_{u^\varepsilon > v(\frac{x}{\varepsilon}, p)} \overset{2\text{ - éch.}}{\rightharpoonup} g(t, x, y, p),$$

$$f^\varepsilon(t, x, p) = \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v(\frac{x}{\varepsilon}, p)} \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \overset{2\text{ - éch.}}{\rightharpoonup} g(t, x, y, p)\frac{\partial v}{\partial p}.$$

- **But :** montrer que $g(t, x, y, p) = \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t,x)}$.
  En effet : si

$$\mathbf{1}_{v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) < u^\varepsilon(t,x)} \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t,x)} = \mathbf{1}_{v(y,p) < v(y, \bar{u}(t,x))}.$$

  alors

$$u^\varepsilon(t, x) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right) \to 0$$

  dans L^1_{loc} lorsque $\varepsilon \to 0$.
  (Fonction test $\psi(t, x, y, p) = \varphi(t, x)\frac{\partial v}{\partial p}(y, p)\mathbf{1}_{\bar{u}(t,x) < p < p_0}$).

- **Formulation équivalente :**

  mesure d'Young = masse de Dirac.

Passage à la limite

But : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \mathrm{div}_x \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)\right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

Rappel :

$$f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p)\frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t,x,p) \quad w - M^1.$$

Profil microscopique : fonction test $\varepsilon\phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p\right)$.

$\rightarrow$ g est solution d'une équation elliptique linéaire :

Passage à la limite

But : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \mathrm{div}_x \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)\right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

Rappel :

$$f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p)\frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t,x,p) \quad w - M^1.$$

Profil microscopique : fonction test $\varepsilon\phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p\right)$.

$\rightarrow$ g est solution d'une équation elliptique linéaire :

Passage à la limite

But : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \mathrm{div}_x \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}, v \left(\frac{x}{\varepsilon}, p \right) \right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

Rappel :

$$f^\varepsilon \overset{\text{2 éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p) \frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t,x,p) \quad w - M^1.$$

Profil microscopique : fonction test $\varepsilon \phi \left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p \right)$.
$\rightarrow$ g est solution d'une équation elliptique linéaire :

Passage à la limite

But : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \operatorname{div}_x \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)\right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

Rappel :

$$f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p)\frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t,x,p) \quad w - M^1.$$

Profil microscopique : fonction test $\varepsilon\phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p\right)$.
$\rightarrow$ g est solution d'une équation elliptique linéaire :

$$-\Delta_y \left(g \frac{\partial v}{\partial p} \right) + \operatorname{div}_y \left(a(y, v(y,p)) g \frac{\partial v}{\partial p} \right) = 0.$$

Or

$$-\Delta_y \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right) + \operatorname{div}_y \left(a(y, v(y,p)) \frac{\partial v}{\partial p} \right) = 0.$$

Passage à la limite

But : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \mathrm{div}_x \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)\right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

Rappel :

$$f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p)\frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t,x,p) \quad w - M^1.$$

Profil microscopique : fonction test $\varepsilon\phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p\right)$.
$\rightarrow$ g est solution d'une équation elliptique linéaire :

$$-\Delta_y \left(g\frac{\partial v}{\partial p} \right) + \mathrm{div}_y \left(a(y, v(y,p)) g \frac{\partial v}{\partial p} \right) = 0.$$

Or

$$-\Delta_y \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right) + \mathrm{div}_y \left(a(y, v(y,p)) \frac{\partial v}{\partial p} \right) = 0.$$

Passage à la limite

But : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \mathrm{div}_x \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)\right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

Rappel :

$$f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p)\frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t,x,p) \quad w - M^1.$$

Profil microscopique : fonction test $\varepsilon\phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p\right)$.
$\rightarrow$ g est solution d'une équation elliptique linéaire :

$$-\Delta_y \left(g\frac{\partial v}{\partial p} \right) + \mathrm{div}_y \left(a(y, v(y,p)) g \frac{\partial v}{\partial p} \right) = 0.$$

Or

$$-\Delta_y \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right) + \mathrm{div}_y \left(a(y, v(y,p)) \frac{\partial v}{\partial p} \right) = 0.$$

$\rightarrow$[Krein-Rutman] g ne dépend pas de y.

Passage à la limite

But : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \mathrm{div}_x \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)\right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

Rappel :

$$f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p)\frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t,x,p) \quad w - M^1.$$

Profil microscopique : fonction test $\varepsilon\phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p\right)$.
$\rightarrow$ g est solution d'une équation elliptique linéaire :
$\rightarrow$[Krein-Rutman] g ne dépend pas de y.

Passage à la limite

But : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \mathrm{div}_x \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)\right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

Rappel :

$$f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p)\frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t,x,p) \quad w - M^1.$$

Profil microscopique : fonction test $\varepsilon\phi\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon},p\right)$.
$\rightarrow$ g est solution d'une équation elliptique linéaire :
$\rightarrow$[Krein-Rutman] g ne dépend pas de y.
Profil macroscopique : fonction test $\phi\,(t,x,p)$.

Passage à la limite

But : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \mathrm{div}_x \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)\right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

Rappel :

$$f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p)\frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t,x,p) \quad w - M^1.$$

Profil microscopique : fonction test $\varepsilon\phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p\right)$.
$\rightarrow$ g est solution d'une équation elliptique linéaire :
$\rightarrow$[Krein-Rutman] g ne dépend pas de y.
Profil macroscopique : fonction test $\phi(t,x,p)$.
$\rightarrow$ g est solution de

$$\partial_t g + \mathrm{div}_x\left(\bar{a}(p) g\right) = \partial_p m, \quad \bar{a} = \partial_p \bar{A}.$$

Passage à la limite

But : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \mathrm{div}_x \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)\right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

Rappel :

$$f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} g(t,x,y,p)\frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t,x,p) \quad w - M^1.$$

Profil microscopique : fonction test $\varepsilon\phi\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon},p\right)$.
$\rightarrow$ g est solution d'une équation elliptique linéaire :
$\rightarrow$[Krein-Rutman] g ne dépend pas de y.
Profil macroscopique : fonction test $\phi\left(t,x,p\right)$.
$\rightarrow$ g est solution de

$$\partial_t g + \mathrm{div}_x\left(\bar{a}(p) g\right) = \partial_p m, \quad \bar{a} = \partial_p \bar{A}.$$

$\rightarrow$ Données bien préparées : $g(t=0) = \mathbf{1}_{p<\bar{u}_0}$.
$\rightarrow$ [Di Perna, Perthame] $g = \mathbf{1}_{p<\bar{u}(t,x)}$.

Plan

Données mal préparées

Nouvelle hypothèse : $\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, p.p. $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y$,

$$v(y, \beta_1) \leq u_0(x, y) \leq v(y, \beta_2),$$

mais $u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))$!

Intuition : (motivée par le développement asymptotique formel) :

$$u^\varepsilon(t, x) \approx w\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{si } t = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$u^\varepsilon(t, x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right) \quad \text{si } t \gg \varepsilon,$$

où $w = w(\tau, x, y)$ est solution de :

$$\begin{cases} \partial_\tau w + \mathrm{div}_y A(y, w) - \Delta_y w = 0, \\ w(\tau = 0, x, y) = u_0(x, y). \end{cases}$$

Données mal préparées

Nouvelle hypothèse : $\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, p.p. $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y$,

$$v(y, \beta_1) \leq u_0(x, y) \leq v(y, \beta_2),$$

mais $u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))$!

Intuition : (motivée par le développement asymptotique formel) :

$$u^\varepsilon(t, x) \approx w\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{si } t = \mathcal{O}(\varepsilon),$$
$$u^\varepsilon(t, x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right) \quad \text{si } t \gg \varepsilon,$$

où $w = w(\tau, x, y)$ est solution de :

$$\begin{cases} \partial_\tau w + \mathrm{div}_y A(y, w) - \Delta_y w = 0, \\ w(\tau = 0, x, y) = u_0(x, y). \end{cases}$$

Données mal préparées

Idée de preuve

Le schéma de preuve suit le développement asymptotique.

Quelques outils :

1. Convergence exponentielle de w vers $v(y, \bar{u}_0(x))$;
2. Résultat dans le cas de données bien préparées ;
3. Principe de contraction dans L^1.

Problème ouvert : comportement si l'hypothèse sur la donnée initiale n'est pas vérifiée ?

Données mal préparées

Idée de preuve

Le schéma de preuve suit le développement asymptotique.

Quelques outils :

1. Convergence exponentielle de w vers $v(y, \bar{u}_0(x))$;
2. Résultat dans le cas de données bien préparées ;
3. Principe de contraction dans L^1.

Problème ouvert : comportement si l'hypothèse sur la donnée initiale n'est pas vérifiée ?

Plan

Plan

Position du problème

- **Nouvel objet d'étude :** comportement lorsque $\varepsilon \to 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x)$ $(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N)$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_i\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t,x)\right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{13}$$

- **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t,x) \approx u^0(t,x,x/\varepsilon)$.
- Le **problème de la cellule** devient :

$$\mathrm{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \left\langle u^0 \right\rangle = p. \tag{14}$$

→ Pas d'unicité ;
→ Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- **Conclusion :** situation beaucoup plus compliquée !

Position du problème

- **Nouvel objet d'étude :** comportement lorsque $\varepsilon \to 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_i\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t,x)\right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{array} \right. \tag{13}$$

- **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t,x) \approx u^0(t,x,x/\varepsilon)$.
- Le **problème de la cellule** devient :

$$\mathrm{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \left\langle u^0 \right\rangle = p. \tag{14}$$

$\to$ Pas d'unicité ;
$\to$ Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- **Conclusion :** situation beaucoup plus compliquée !

Position du problème

- **Nouvel objet d'étude :** comportement lorsque $\varepsilon \to 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x)$ $(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N)$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_i\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t,x)\right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{13}$$

- **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t,x) \approx u^0(t,x,x/\varepsilon)$.
- Le **problème de la cellule** devient :

$$\mathrm{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \left\langle u^0 \right\rangle = p. \tag{14}$$

→ Pas d'unicité ;
→ Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- **Conclusion :** situation beaucoup plus compliquée !

Position du problème

- **Nouvel objet d'étude :** comportement lorsque $\varepsilon \to 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x)$ $(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N)$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_i\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t,x)\right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{13}$$

- **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t,x) \approx u^0(t,x,x/\varepsilon)$.
- Le **problème de la cellule** devient :

$$\mathrm{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \left\langle u^0 \right\rangle = p. \tag{14}$$

$\longrightarrow$ Pas d'unicité ;

$\longrightarrow$ Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- **Conclusion :** situation beaucoup plus compliquée !

Position du problème

- **Nouvel objet d'étude :** comportement lorsque $\varepsilon \to 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_i\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t,x)\right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{13}$$

- **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t,x) \approx u^0(t,x,x/\varepsilon)$.
- Le **problème de la cellule** devient :

$$\mathrm{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \left\langle u^0 \right\rangle = p. \tag{14}$$

$\longrightarrow$ Pas d'unicité ;
$\longrightarrow$ Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- **Conclusion :** situation beaucoup plus compliquée !

Position du problème

- **Nouvel objet d'étude :** comportement lorsque $\varepsilon \to 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_i\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t,x)\right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{13}$$

- **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t,x) \approx u^0(t,x,x/\varepsilon)$.
- Le **problème de la cellule** devient :

$$\mathrm{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \left\langle u^0 \right\rangle = p. \tag{14}$$

  $\longrightarrow$ Pas d'unicité ;
  $\longrightarrow$ Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- **Conclusion :** situation beaucoup plus compliquée !

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\mathrm{div}_y A(y, u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R}, \; y \in [0,1]^N.$$

- Si on dispose de **bornes** *a priori* **dans** L^∞ **:**
  - Formulation cinétique de l'équation ;
  - Compacité grâce à des lemmes de moyenne si le flux est non-linéaire.

  $\longrightarrow$ Démontrer l'existence devient possible...
- **Point clé :** obtention de bornes *a priori* dans L^∞.
- **Difficulté :** il faut intégrer la divergence...
  $\longrightarrow N = 1$ joue un rôle particulier.

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\mathrm{div}_y A(y, u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R},\ y \in [0,1]^N.$$

- Si on dispose de **bornes *a priori* dans L^∞ :**
  - Formulation cinétique de l'équation ;
  - Compacité grâce à des lemmes de moyenne si le flux est non-linéaire.

$\longrightarrow$ Démontrer l'existence devient possible...

- **Point clé :** obtention de bornes *a priori* dans L^∞.
- **Difficulté :** il faut intégrer la divergence...
  $\longrightarrow$ $N = 1$ joue un rôle particulier.

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\mathrm{div}_y A(y, u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R}, \; y \in [0,1]^N.$$

- Si on dispose de **bornes *a priori* dans L^∞ :**
  - Formulation cinétique de l'équation ;
  - Compacité grâce à des lemmes de moyenne si le flux est non-linéaire.

  $\longrightarrow$ Démontrer l'existence devient possible...
- **Point clé :** obtention de bornes *a priori* dans L^∞.
- **Difficulté :** il faut intégrer la divergence...

  $\longrightarrow$ $N = 1$ joue un rôle particulier.

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\mathrm{div}_y A(y,u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R},\ y \in [0,1]^N.$$

- Si on dispose de **bornes *a priori* dans L^∞ :**
  - Formulation cinétique de l'équation ;
  - Compacité grâce à des lemmes de moyenne si le flux est non-linéaire.

  $\longrightarrow$ Démontrer l'existence devient possible...
- **Point clé :** obtention de bornes *a priori* dans L^∞.
- **Difficulté :** il faut intégrer la divergence...

  $\longrightarrow$ $N = 1$ joue un rôle particulier.

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\mathrm{div}_y A(y, u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R}, \; y \in [0,1]^N.$$

- Si on dispose de **bornes *a priori* dans L^∞ :**
  - Formulation cinétique de l'équation ;
  - Compacité grâce à des lemmes de moyenne si le flux est non-linéaire.

  $\longrightarrow$ Démontrer l'existence devient possible...
- **Point clé :** obtention de bornes *a priori* dans L^∞.
- **Difficulté :** il faut intégrer la divergence...

  $\longrightarrow$ $N = 1$ joue un rôle particulier.

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\mathrm{div}_y A(y, u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R}, \; y \in [0,1]^N.$$

- Si on dispose de **bornes *a priori* dans L^∞ :**
  - Formulation cinétique de l'équation ;
  - Compacité grâce à des lemmes de moyenne si le flux est non-linéaire.

  $\longrightarrow$ Démontrer l'existence devient possible...
- **Point clé :** obtention de bornes *a priori* dans L^∞.
- **Difficulté :** il faut intégrer la divergence...
  $\longrightarrow$ $N = 1$ joue un rôle particulier.

Résultats antérieurs

- **$N = 1$: équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

Résultats antérieurs

- **$N = 1$: équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :
Si

$$\inf_{y\in Y} A(y,p) \to +\infty \quad \text{lorsque } |p| \to \infty,$$

alors $\forall p \in \mathbb{R}$, $\exists v$ sol. du problème de la cellule.
De plus, $\exists!\ \bar{A}(p) \in \mathbb{R}, \forall v$ sol. du pb. de la cellule t.q. $\langle v\rangle = p$,

$$\int_Y A(y, v(y))\, dy = \bar{A}(p).$$

Résultats antérieurs

- **$N = 1$: équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :
Si

$$\inf_{y \in Y} A(y, p) \to +\infty \quad \text{lorsque } |p| \to \infty,$$

alors $\forall p \in \mathbb{R}$, $\exists v$ sol. du problème de la cellule.
De plus, $\exists!\ \bar{A}(p) \in \mathbb{R}, \forall v$ sol. du pb. de la cellule t.q. $\langle v \rangle = p$,

$$\int_Y A(y, v(y))\, dy = \bar{A}(p).$$

- Unicité du flux homogénéisé ;
- Notion de problème homogénéisé ;
- Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

Résultats antérieurs

- **$N = 1$: équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :
Si

$$\inf_{y \in Y} A(y,p) \to +\infty \quad \text{lorsque } |p| \to \infty,$$

alors $\forall p \in \mathbb{R}$, $\exists v$ sol. du problème de la cellule.
De plus, $\exists!\ \bar{A}(p) \in \mathbb{R}, \forall v$ sol. du pb. de la cellule t.q. $\langle v \rangle = p$,

$$\int_Y A(y, v(y))\, dy = \bar{A}(p).$$

- Unicité du flux homogénéisé ;
- Notion de problème homogénéisé ;
- Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

Résultats antérieurs

- **$N = 1$: équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :
Si

$$\inf_{y \in Y} A(y, p) \to +\infty \quad \text{lorsque } |p| \to \infty,$$

alors $\forall p \in \mathbb{R}$, $\exists v$ sol. du problème de la cellule.
De plus, $\exists!\ \bar{A}(p) \in \mathbb{R}, \forall v$ sol. du pb. de la cellule t.q. $\langle v \rangle = p$,

$$\int_Y A(y, v(y))\, dy = \bar{A}(p).$$

- Unicité du flux homogénéisé ;
- Notion de problème homogénéisé ;
- Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

Résultats antérieurs

- **$N = 1$: équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

  - Unicité du flux homogénéisé ;
  - Notion de problème homogénéisé ;
  - Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

- **$A(y,\xi) = a_0(y)g(\xi)$, $\mathrm{div}_y a_0 = 0$, $g'(\xi) \neq 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}$;**

W. E (1992) ; T. Hou, X. Xin (1992) :

  - Existence, mais pas d'unicité des solutions du pb. de la cellule ; pas de problème homogénéisé ;
  - Existence et unicité des solutions du problème limite :

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \mathrm{div}_x\left(\tilde{a}_0(y)g(u)\right) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, y \in Y,\\ &\mathrm{div}_y(a_0(y)g(u)) = 0. \end{aligned}$$

  - Résultat de convergence forte.

Résultats antérieurs

• **$N = 1$: équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**
P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

- Unicité du flux homogénéisé ;
- Notion de problème homogénéisé ;
- Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

• **$A(y,\xi) = a_0(y)g(\xi)$, $\mathrm{div}_y a_0 = 0$, $g'(\xi) \neq 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}$;**
W. E (1992) ; T. Hou, X. Xin (1992) :

- Existence, mais pas d'unicité des solutions du pb. de la cellule ; pas de problème homogénéisé ;
- Existence et unicité des solutions du problème limite :

$$\partial_t u + \mathrm{div}_x\left(\tilde{a}_0(y)g(u)\right) = 0, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, y \in Y,$$
$$\mathrm{div}_y\left(a_0(y)g(u)\right) = 0.$$

- Résultat de convergence forte.

Résultats antérieurs

- **$N = 1$: équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

  - Unicité du flux homogénéisé ;
  - Notion de problème homogénéisé ;
  - Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

- **$A(y, \xi) = a_0(y)g(\xi)$, $\mathrm{div}_y a_0 = 0$, $g'(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}$;**

W. E (1992) ; T. Hou, X. Xin (1992) :

  - Existence, mais pas d'unicité des solutions du pb. de la cellule ; pas de problème homogénéisé ;
  - Existence et unicité des solutions du problème limite :

$$\partial_t u + \mathrm{div}_x\left(\tilde{a}_0(y)g(u)\right) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, y \in Y,$$
$$\mathrm{div}_y(a_0(y)g(u)) = 0.$$

  - Résultat de convergence forte.

Résultats antérieurs

- **$N = 1$: équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

  - Unicité du flux homogénéisé ;
  - Notion de problème homogénéisé ;
  - Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

- **$A(y,\xi) = a_0(y)g(\xi)$, $\mathrm{div}_y a_0 = 0$, $g'(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}$;**

W. E (1992) ; T. Hou, X. Xin (1992) :

  - Existence, mais pas d'unicité des solutions du pb. de la cellule ; pas de problème homogénéisé ;
  - Existence et unicité des solutions du problème limite :

$$\partial_t u + \mathrm{div}_x\left(\tilde{a}_0(y)g(u)\right) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, y \in Y,$$
$$\mathrm{div}_y(a_0(y)g(u)) = 0.$$

  - Résultat de convergence forte.

Résultats antérieurs

- **$N = 1$: équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

  - Unicité du flux homogénéisé ;
  - Notion de problème homogénéisé ;
  - Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

- **$A(y,\xi) = a_0(y)g(\xi)$, $\mathrm{div}_y a_0 = 0$, $g'(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}$;**

W. E (1992) ; T. Hou, X. Xin (1992) :

  - Existence, mais pas d'unicité des solutions du pb. de la cellule ; pas de problème homogénéisé ;
  - Existence et unicité des solutions du problème limite :

$$\partial_t u + \mathrm{div}_x \left(\tilde{a}_0(y)g(u)\right) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, y \in Y,$$
$$\mathrm{div}_y(a_0(y)g(u)) = 0.$$

  - Résultat de convergence forte.

Plan

Contraintes microscopiques

- Si $\mathrm{div}_y A(y,p) = 0$, alors $f^\varepsilon = \mathbf{1}_{p<u^\varepsilon}$ est solution de

$$\partial_t f^\varepsilon + a\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \partial_p m^\varepsilon, \quad m^\varepsilon \geq 0. \qquad (15)$$

- **Passage à la limite** dans (15) :
  À une sous-suite près, $f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} f$, $m^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} m$.
- **Première étape** : Profil microscopique.

$$\mathrm{div}_y(a(y,p)f(t,x,y,p)) = 0,$$
$$\partial_p f \leq 0.$$

- **Espace de contraintes :**

$$\mathbb{K} := \{\varphi \in L^2(Y \times \mathbb{R}),\ \mathrm{div}_y(a(y,p)\varphi) = 0\},$$
$$\mathbb{P} \ : \quad \text{projection } L^2 \text{ sur } \mathbb{K}.$$

Contraintes microscopiques

- Si $\mathrm{div}_y A(y,p) = 0$, alors $f^\varepsilon = \mathbf{1}_{p<u^\varepsilon}$ est solution de

$$\partial_t f^\varepsilon + a\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \partial_p m^\varepsilon, \quad m^\varepsilon \geq 0. \tag{15}$$

- **Passage à la limite** dans (15) :
  À une sous-suite près, $f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} f$, $m^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} m$.
- **Première étape** : Profil microscopique.

$$\mathrm{div}_y(a(y,p)f(t,x,y,p)) = 0,$$
$$\partial_p f \leq 0.$$

- **Espace de contraintes :**

$$\mathbb{K} := \{\varphi \in L^2(Y \times \mathbb{R}),\ \mathrm{div}_y(a(y,p)\varphi) = 0\},$$
$$\mathbb{P} \ : \quad \text{projection } L^2 \text{ sur } \mathbb{K}.$$

Contraintes microscopiques

- Si $\mathrm{div}_y A(y,p) = 0$, alors $f^\varepsilon = \mathbf{1}_{p<u^\varepsilon}$ est solution de

$$\partial_t f^\varepsilon + a\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \partial_p m^\varepsilon, \quad m^\varepsilon \geq 0. \qquad (15)$$

- **Passage à la limite** dans (15) :
  À une sous-suite près, $f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} f$, $m^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} m$.
- **Première étape** : Profil microscopique.

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}_y(a(y,p)f(t,x,y,p)) = 0,\\ &\partial_p f \leq 0.\end{aligned}$$

- **Espace de contraintes :**

$$\begin{aligned}&\mathbb{K} := \{\varphi \in L^2(Y \times \mathbb{R}),\ \mathrm{div}_y(a(y,p)\varphi) = 0\},\\ &\mathbb{P} \ :\ \text{projection } L^2 \text{ sur } \mathbb{K}.\end{aligned}$$

Contraintes microscopiques

- Si $\mathrm{div}_y A(y,p) = 0$, alors $f^\varepsilon = \mathbf{1}_{p<u^\varepsilon}$ est solution de

$$\partial_t f^\varepsilon + a\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \partial_p m^\varepsilon, \quad m^\varepsilon \geq 0. \qquad (15)$$

- **Passage à la limite** dans (15) :
  À une sous-suite près, $f^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} f$, $m^\varepsilon \overset{2\text{ éch.}}{\rightharpoonup} m$.
- **Première étape** : Profil microscopique.

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}_y(a(y,p)f(t,x,y,p)) = 0, \\ &\partial_p f \leq 0. \end{aligned}$$

- **Espace de contraintes :**

$$\begin{aligned} &\mathbb{K} := \{\varphi \in L^2(Y \times \mathbb{R}),\ \mathrm{div}_y(a(y,p)\varphi) = 0\}, \\ &\mathbb{P} \ : \ \text{ projection } L^2 \text{ sur } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- **Idée :** projeter l'équation (15) sur $\mathbb{K}$ afin de filtrer les termes fortement oscillants.

  $\rightarrow$ Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.

- **Problème d'évolution formel :**

$$\mathbb{P}\left\{\partial_t f + a(y, p) \cdot \nabla_x f - \partial_p m\right\} = 0.$$

Ré-écriture :

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

$m \geq 0$, $M^\perp \in \mathbb{K}^\perp$.
$\rightarrow$ Problème d'évolution limite ! ($\neq$ problème homogénéisé...)

- **Questions :** Existence ? Unicité ? Convergence ?

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- **Idée :** projeter l'équation (15) sur $\mathbb{K}$ afin de filtrer les termes fortement oscillants.

  $\rightarrow$ Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.

- **Problème d'évolution formel :**

$$\mathbb{P}\left\{\partial_t f + a(y, p) \cdot \nabla_x f - \partial_p m\right\} = 0.$$

  Ré-écriture :

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

  $m \geq 0$, $M^\perp \in \mathbb{K}^\perp$.

  $\rightarrow$ Problème d'évolution limite ! ($\neq$ problème homogénéisé...)

- **Questions :** Existence ? Unicité ? Convergence ?

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- **Idée :** projeter l'équation (15) sur $\mathbb{K}$ afin de filtrer les termes fortement oscillants.
  $\rightarrow$ Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.

- **Problème d'évolution formel :**

$$\mathbb{P}\left\{\partial_t f + a(y, p) \cdot \nabla_x f - \partial_p m\right\} = 0.$$

Ré-écriture :

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

$m \geq 0$, $M^\perp \in \mathbb{K}^\perp$.
$\rightarrow$ Problème d'évolution limite ! ($\neq$ problème homogénéisé...)

- **Questions :** Existence ? Unicité ? Convergence ?

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- **Idée :** projeter l'équation (15) sur $\mathbb{K}$ afin de filtrer les termes fortement oscillants.

  $\rightarrow$ Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.

- **Problème d'évolution formel :**

$$\mathbb{P}\left\{\partial_t f + a(y,p) \cdot \nabla_x f - \partial_p m\right\} = 0.$$

Ré-écriture :

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

$m \geq 0$, $M^\perp \in \mathbb{K}^\perp$.

$\rightarrow$ Problème d'évolution limite ! ($\neq$ problème homogénéisé...)

- **Questions :** Existence ? Unicité ? Convergence ?

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- **Idée :** projeter l'équation (15) sur $\mathbb{K}$ afin de filtrer les termes fortement oscillants.
  $\rightarrow$ Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.

- **Problème d'évolution formel :**

$$\mathbb{P}\left\{\partial_t f + a(y,p)\cdot\nabla_x f - \partial_p m\right\} = 0.$$

Ré-écriture :

$$\partial_t f + a\cdot\nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

$m \geq 0$, $M^\perp \in \mathbb{K}^\perp$.
$\rightarrow$ Problème d'évolution limite ! ($\neq$ problème homogénéisé...)

- **Questions :** Existence ? Unicité ? Convergence ?

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- **Idée :** projeter l'équation (15) sur $\mathbb{K}$ afin de filtrer les termes fortement oscillants.
  $\rightarrow$ Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.

- **Problème d'évolution formel :**

$$\mathbb{P}\left\{\partial_t f + a(y,p)\cdot\nabla_x f - \partial_p m\right\} = 0.$$

  Ré-écriture :

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

  $m \geq 0$, $M^\perp \in \mathbb{K}^\perp$.
  $\rightarrow$ Problème d'évolution limite ! ($\neq$ problème homogénéisé...)

- **Questions :** Existence ? Unicité ? Convergence ?

Résultat rigoureux

Définition :(Solution du système limite)
Fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N \times Y \times \mathbb{R})) \cap L^\infty$, t.q. $\exists \mathcal{M}$ distribution,

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \mathcal{M}, \quad f(t=0) = \mathbf{1}_{p<u_0},$$
$$\mathrm{div}_y (a(y,p) f(t,x,y,p)) = 0, \quad \partial_p f \leq 0,$$
$$\int_{Y \times \mathbb{R}} \mathcal{M}(t,x)\phi \leq 0 \quad \forall \phi \in L^\infty_{\text{loc}} \text{ t.q. } \partial_p \phi \geq 0,\ \mathrm{div}_y(a\phi) = 0.$$

(Représentation formelle : $\mathcal{M} = \partial_p m + M^\perp$.)

Théorème : Soit $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ t.q. $\mathrm{div}_y A(y, u_0(\cdot, y)) = 0$. Alors :

1. Existence et unicité des solutions du système limite ;
2. Rigidité : les sol. du système limite sont de la forme $\mathbf{1}_{p<u}$;
3. Convergence forte : lorsque $\varepsilon \to 0$, dans L^1_{loc},
$$u^\varepsilon(t,x) - u\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \to 0$$

Résultat rigoureux

Définition :(Solution du système limite)
Fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N \times Y \times \mathbb{R})) \cap L^\infty$, t.q. $\exists \mathcal{M}$ distribution,

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \mathcal{M}, \quad f(t=0) = \mathbf{1}_{p<u_0},$$
$$\mathrm{div}_y(a(y,p)f(t,x,y,p)) = 0, \quad \partial_p f \leq 0,$$
$$\int_{Y\times\mathbb{R}} \mathcal{M}(t,x)\phi \leq 0 \quad \forall \phi \in L^\infty_{\mathrm{loc}} \text{ t.q. } \partial_p \phi \geq 0,\ \mathrm{div}_y(a\phi) = 0.$$

(Représentation formelle : $\mathcal{M} = \partial_p m + M^\perp$.)

Théorème : Soit $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ t.q. $\mathrm{div}_y A(y, u_0(\cdot, y)) = 0$. Alors :

1. Existence et unicité des solutions du système limite ;
2. Rigidité : les sol. du système limite sont de la forme $\mathbf{1}_{p<u}$;
3. Convergence forte : lorsque $\varepsilon \to 0$, dans L^1_{loc},

$$u^\varepsilon(t,x) - u\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \to 0$$

Résumé général

Cas visqueux :

- Résultat de convergence forte pour des données initiales quelconques (mal préparées).
- Système limite :
  - Équation de la cellule ;
  - Problème homogénéisé.

  $\longrightarrow$ Découplage des échelles micro et macro.
- Couche initiale pour les données mal préparées.

Cas hyperbolique :

- Résultat de convergence forte pour des données initiales bien préparées.
- Système limite : intrinsèquement cinétique
  - Équation de la cellule ;
  - Équation d'évolution ($\approx$ formulation cinétique).

  $\longrightarrow$ Pas de découplage des échelles micro et macro.

Résumé général

Cas visqueux :

- Résultat de convergence forte pour des données initiales quelconques (mal préparées).
- Système limite :
  - Équation de la cellule ;
  - Problème homogénéisé.

  $\longrightarrow$ Découplage des échelles micro et macro.
- Couche initiale pour les données mal préparées.

Cas hyperbolique :

- Résultat de convergence forte pour des données initiales bien préparées.
- Système limite : intrinsèquement cinétique
  - Équation de la cellule ;
  - Équation d'évolution ($\approx$ formulation cinétique).

  $\longrightarrow$ Pas de découplage des échelles micro et macro.

Cas visqueux :

- Théorie unifiée pour l'existence de solutions du problème de la cellule ?
- Couche initiale : recherche d'hypothèses moins fortes sur la condition initiale.

Cas hyperbolique :

- Existence de solutions du problème de la cellule ;
- Comportement de la solution lorsque la donnée initiale est mal préparée (pour des flux non-linéaires).

Cas visqueux :

- Théorie unifiée pour l'existence de solutions du problème de la cellule ?
- Couche initiale : recherche d'hypothèses moins fortes sur la condition initiale.

Cas hyperbolique :

- Existence de solutions du problème de la cellule ;
- Comportement de la solution lorsque la donnée initiale est mal préparée (pour des flux non-linéaires).